



Universidad Simón Bolívar

Aplicaciones Geofísicas de los Filtros Digitales

Mario I. Caicedo¹
Departamento de Física

Con la Colaboración de

Milagrosa Aldana
Departamento de Ciencias de la Tierra

Versión 1.0: Sartenejas, Abril de 1996

Versión 1.1: Sartenejas, Julio de 2002

¹Estas notas son de distribución libre y pueden ser descargadas del sitio:
<http://www.fis.usb.ve/~mcaicedo>,
como es usual se espera que el usuario de las notas las refiera adecuadamente.

Índice general

INTRODUCCIÓN	6
1. Series de Fourier	8
1.1. Series de Fourier Trigonométricas	8
1.2. Cálculo de los Coeficientes	11
1.3. El Espacio de las Funciones de Cuadrado Integrable	13
1.4. Convergencia Media Cuadrática y Convergencia Uniforme de las Series de Fourier.	16
1.5. El Fenómeno de Gibbs	17
1.6. Series de Fourier Exponenciales	18
1.7. Bases Ortonormales	21
1.8. Dos Filtros Conocidos: La Derivada y La integral:	21
1.9. Problemas	23
2. La Delta (δ) de Dirac y la Relación de Clausura	26
2.1. Definición de la δ de Dirac	26
2.2. La Relación de Completitud	28
2.3. Problemas	30
3. Transformación de Fourier	31
3.1. La Transformada de Fourier: Definición	31
3.2. Fórmula de Inversión	35
3.3. Derivación e Integración: otra visita	36
3.4. La Relación Fundamental Entre Ancho Temporal y Ancho de Banda en Frecuencia.	37
3.5. Un ejemplo importante	38
3.6. Problemas.	40

4. Convolución y Correlación	43
4.1. Definición de la Convolución	43
4.2. Teorema de Convolución	44
4.3. Señales Causales	46
4.4. El Producto de Correlación	47
4.5. Problemas.	48
5. Filtros ó Sistemas Lineales	49
5.1. Función de Transferencia	51
5.2. Cálculo de G	53
5.3. Problemas	54
6. Señales discretas	55
6.1. ¿Qué es una Señal Discreta?	55
6.2. El Teorema de Nyquist y su Interpretación	56
6.3. El Fenómeno de <i>ALIASING</i>	58
6.4. Vectores y señales discretas	60
7. Convolución y Correlación de señales discretas	62
7.1. Convolución Discreta	62
7.2. Correlación Discreta	65
7.3. Problemas	67
8. Transformada de Fourier Discreta	69
8.1. Series de tiempo limitadas.	69
8.2. Efecto de la Trucación.	70
8.3. Definición Precisa de la DFT	71
8.4. La Inversibilidad de la Transformada de Fourier Discreta	74
8.5. Periodicidad y Dominio Fundamental	75
9. Transformada Z	76
9.1. La Transformada Z y su Relación con la Transformada de Fourier Discreta	76
9.2. Relación con la Convolución y Correlación Discretas	78
9.3. Problemas	79
10. Deconvolución	80
10.1. El Caso Continuo	80
10.2. El Caso Discreto	82

<i>Filtros Digitales</i>	<i>M. I. Caicedo y M. Aldana</i>	3
10.2.1. Presentación del Problema		82
10.2.2. Filtros Inversos		83
10.2.3. Mínimos Cuadrados		85
11. La transformada de Fourier Rápida		88
11.1. Código para FFT		94
Bibliografía		99

Índice de figuras

1.1.	La <i>onda cuadrada</i> aproximada por la suma de los primeros 2 términos de la serie 1.39	18
1.2.	Una aproximación mejor, se han tomado en cuenta 3 términos de la serie de Fourier	18
1.3.	Acá se está graficando la suma de los primeros 6 términos de la serie 1.39, es claro que la aproximación mejora al incluir términos de alta frecuencia, sin embargo cerca de la discontinuidad se mantiene la anomalía asociada al fenómeno de Gibbs	19
2.1.	La función $\Delta_\epsilon(t - \tilde{t})$	27
4.1.	El “Faltung Theorem“ permite convertir la convolución en tiempo en un producto en el dominio de la frecuencia.	45
5.1.	Representación esquemática de un sistema lineal	49
5.2.	Principio de superposición	49
5.3.	un ejemplo mecánico: el oscilador amortiguado	50
6.1.	El proceso de discretización de una señal.	57
6.2.	La transformada de Fourier de una señal discretizada es una función periódica y continua de la frecuencia, que se construye como una superposición de “copias“ de la transformada de Fourier original.	58
6.3.	El fenómeno de aliasing visto en frecuencia	59
6.4.	Otra manera de entender el fenómeno consiste en considerar la discretización de una señal periódica. Si el muestreo se efectúa con un intervalo mayor a medio período la señal que se reconstruya a partir de la discretización aparecerá como una señal de baja frecuencia	60

11.1. Comparación entre el Nro. de multiplicaciones complejas requeridas, en el cálculo directo, y en el algoritmo de Transformada Rápida de Fourier (FFT). 94

Introducción

El procesamiento de datos es una de las áreas de conocimiento más básicas que un ingeniero geofísico deberá manejar durante su ejercicio profesional, bien sea porque el profesional se desempeñe directamente como analista en un centro de procesamiento, o porque actuando como interprete deba entender las virtudes y limitaciones de cada una de las técnicas numéricas con que se traten los datos de una zona prospectiva. Pensando en estos términos se presenta este curso corto cuyo objetivo consiste en familiarizar al estudiante con algunos de los métodos matemáticos y numéricos básicos del análisis de señales. Se introducen las ideas fundamentales acerca del análisis de señales analógicas, energía de una señal, series e integrales de Fourier, convolución y correlación. Se introducen también algunas ideas acerca de sistemas lineales haciendo énfasis en la representación en términos de funciones de transferencia y se extienden estos resultados al caso de señales discretas.

Las preguntas y ejercicios que aparecen a lo largo del desarrollo principal del texto constituyen una componente fundamental del curso, se pretende que el estudiante elabore las ideas desarrolladas en el libro. Además de estas preguntas algunos capítulos contienen secciones de problemas y ejercicios complementarios. También aparecen algunos programas que el estudiante debería probar en algún computador, debemos insistir en que solo la manipulación constante de las ideas que se presentan en este curso le permitiran al estudiante obtener un dominio operativo adecuado de los temas en discusión.

El texto incluye una bibliografía no muy extensa pero si enfocada, tanto a complementar algunos detalles matemáticos difíciles, como a destacar las aplicaciones a la geofísica, en todo caso el estudiante debería mantener la postura de que los metodos matemáticos que se le están presentando son totalmente generales y pueden aplicarse en cualquier rama de las ciencias o la ingeniería en que se este lidiando con series numéricas.

El curso consta de once (11) capítulos adecuados para un curso de doce

semanas que se dicta en la universidad Simón Bolívar. La presentación final es producto de las notas de clase del Prof. M. Caicedo quien dictó el curso durante cuatro años seguidos. La profesora M. Aldana ha probado y revisado el material en el mismo curso durante tres años más encontrando resultados bastante positivos. El material también ha sido utilizado y revisado por estudiantes tesisistas de Ing. Geofísica durante el desarrollo de sus tesis de pregrado.

Deseamos agradecer a la Ing. Scarlet Castro quien durante el desarrollo de su tesis de grado redactó la primera versión del capítulo 11 (acerca de la transformada rápida de Fourier). También debemos agradecer a la Ing. Carmen Pérez por su ayuda en la transcripción final del trabajo a su versión en \LaTeX y a nuestro administrador de red Lic. Mauro Varela quien depuró las instalaciones del compilador de \LaTeX .

Dr. M. I. Caicedo
Departamento de Física

Dra. M. Aldana
Departamento de Ciencias de la Tierra

Capítulo 1

Series de Fourier

1.1. Series de Fourier Trigonométricas

El teorema de Fourier es la base fundamental de todo el análisis clásico de señales, tanto en el enfoque determinista como en el enfoque estadístico. El teorema establece que cualquier función periódica de *cuadrado integrable* (ver definición 1) puede ser expresada como la suma pesada (combinación lineal ó superposición) de un número -en principio infinito- de funciones trigonométricas cuyos períodos dependen en una forma muy precisa del período de la función original. Desde el punto de vista de las aplicaciones, el análisis de Fourier (o análisis espectral) es un ingrediente fundamental para el diseño y aplicación de filtros.

La primera noción que necesitaremos para adentrarnos en el estudio del análisis armónico es la siguiente:

Definición 1 *Se dice que una función de variable real y valores reales es de cuadrado integrable ($f \in L^2[a, b]$) en el intervalo $[a, b]$ si f satisface la condición:*

$$\int_a^b f^2(t) dt < \infty \quad (1.1)$$

en este punto esta definición parece bastante abstracta, sin embargo, tiene un significado físico bien interesante sobre el cual elaboraremos en la sección (1.3). En todo caso, habiendo precisado matemáticamente los términos, es

posible enunciar el teorema de Fourier¹ como sigue:

Teorema 1 *Toda función periódica ($f(t+T) = f(t)$) y de cuadrado integrable ($f \in L^2[-T/2, T/2]$) puede aproximarse en forma única por una serie trigonométrica como sigue:*

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sen(\omega_n t) \quad (1.2)$$

donde las cantidades: $\omega_o = \frac{2\pi}{T}$ y $\omega_n = n\omega_o$ se denominan “frecuencia fundamental” y “subarmónicos” de f .

Tratemos de comprender el contenido de este teorema. La expresión (1.2) es una aproximación a la función f en términos de funciones armónicas de diferentes frecuencias (todas ellas múltiplos enteros de la frecuencia fundamental) donde los coeficientes ($a_n, b_n, n=0,1,\dots$) representan los pesos que cada una de las componentes armónicas tiene en la función f .

Ejemplo 1 *Para ser un poco más explícitos, consideremos la función:*

$$f(t) = 2\sen\left(\frac{3}{2}\omega_0 t\right)\cos\left(\frac{1}{2}\omega_0 t\right) \quad (1.3)$$

En primer lugar debemos observar que esta es una función de cuadrado integrable (**ejercicio**). Adicionalmente, el uso de identidades trigonométricas estándar o de la notación compleja ($e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\sen\theta$) permite escribir:

$$f(t) = \sen(\omega_0 t) + \sen(2\omega_0 t) \quad (1.4)$$

donde -en virtud del teorema (1)- se reconoce la serie de Fourier de una función de período $T = 2\pi/\omega_0$ en la que todos los coeficientes, excepto b_1 y b_2 , son nulos mientras que los dos coeficientes no cero representan un peso igual a 1.

Ejemplo 2 *Como segundo ejemplo consideremos la suma (sobre la que tendremos más que decir en el futuro) :*

$$f(t) = \sen(t) + \sen(3t)/3 + \sen(5t)/5 + \sen(7t)/7 + \sen(9t)/9 \quad (1.5)$$

¹La prueba del teorema es bastante técnica y acá nos limitaremos a referir al lector interesado a la literatura, sugiriéndole en particular el texto de Courant y John [1]

Es claro que esta es una serie de Fourier de 5 términos. En que los pesos de las frecuencias más altas son menores que los pesos de las frecuencias bajas.

Volviendo al problema de representación de una señal periódica arbitraria, es claro que el problema básico del análisis (cálculo de los coeficientes) de Fourier y la posterior reconstrucción (síntesis) de la señal en términos de las sumas parciales de la serie requiere de alguna metodología sistemática para el cálculo de los coeficientes. Y este es el tema de la siguiente sección discute el problema del cálculo de tales coeficientes.

Ejemplo 3 *Antes de entrar en el problema del cálculo de los coeficientes queremos retomar el ejemplo 1 para introducir otra noción, a saber, la de “filtrado en frecuencia”. La representación de la función (1.3) como suma de un par de funciones trigonométricas, puede interpretarse como la superposición de dos armónicos, uno de baja frecuencia (ω_0) y otro de alta frecuencia ($2\omega_0$). La función:*

$$f_F(t) = \text{sen}(\omega_0 t) + 0,1\text{sen}(2\omega_0 t) \quad (1.6)$$

es una versión de f en la que las altas frecuencias han sido “atenuadas” a un 10% de su valor original. Ciertamente, $f(t) \neq f_F(t)$, y esto no es más que el resultado de la aplicación de un filtro de atenuación de altas frecuencias.

Ejercicio 1 *Con el fin de visualizar el efecto de un filtro de reducción de altas frecuencias grafique la función*

$$f_F(t) = \text{sen}(t) + \alpha \text{sen}(10t) \quad (1.7)$$

para diversos valores de $0 \leq \alpha < 1$ observando que el límite en que $\alpha = 0$ es el límite en que la componente de alta frecuencia se ha eliminado por completo

Ejercicio 2 *Imagine una función que contenga tres escalas de frecuencia diferentes, ‘¿cómo se pueden amplificar o atenuar las componentes de las frecuencias altas, medias y bajas²?’*

²Una forma más familiar de imaginar este proceso de filtraje en frecuencia lo constituye el elemento ecualizador de un equipo de alta fidelidad. Los movimientos de los diferentes diales del panel de control tienen por efecto la atenuación o amplificación de ciertas bandas de frecuencia del sonido que estamos intentando reproducir. En general, el trabajo de un ingeniero de señales consiste en diseñar y aplicar, juiciosamente, un conjunto de filtros, para modificar un conjunto de señales hasta obtener lo que considere el resultado esperado.

1.2. Cálculo de los Coeficientes

Vamos a comenzar esta sección discutiendo un conjunto de identidades integrales conocidas como *relaciones de ortogonalidad* [2]. Consideremos la integral:

$$I_{1,mn} = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt \operatorname{sen}(\omega_m t) \operatorname{sen}(\omega_n t) \quad (1.8)$$

Si m y n son distintos podemos escribir:

$$I_{1,mn} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt \{ \cos[(\omega_m - \omega_n)t] + \cos[(\omega_m + \omega_n)t] \} \quad (1.9)$$

que es una integral trivialmente nula. Si m y n son iguales, (1.8) adopta la forma:

$$I_{1,mn} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt \{ 1 - \cos(2\omega_m t) \} = \frac{T}{2} \quad (1.10)$$

En definitiva, podemos escribir:

$$I_{1,mn} = \frac{T}{2} \delta_{mn} \quad (1.11)$$

donde el símbolo: δ_{mn} se denomina *delta de Kronecker* y está definido como sigue:

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases} \quad (1.12)$$

Análogamente, es posible probar (**ejercicio**) que las integrales:

$$I_{2,mn} = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt \cos(\omega_m t) \cos(\omega_n t), \quad y \quad (1.13)$$

$$I_{3,mn} = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt \cos(\omega_m t) \operatorname{sen}(\omega_n t) \quad (1.14)$$

tienen los valores:

$$I_{2,mn} = \frac{T}{2} \delta_{mn} \quad (1.15)$$

$$I_{3,mn} = 0 \quad (1.16)$$

Las tres identidades (1.11)(1.15) y (1.16) son las denominadas relaciones de ortogonalidad.

Volvamos sobre el punto que realmente nos interesa: el cálculo de los coeficientes de Fourier. Si multiplicamos la ec (1.2) por $\text{sen}(\omega_p t)$ e integramos en un período completo, obtenemos la igualdad:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} -\frac{T}{2} dt \text{sen}(\omega_p t) f(t) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt \text{sen}(\omega_p t) \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}(\omega_n t) \right] \quad (1.17)$$

Cambiando el orden de suma e integración (**ejercicio:** ¿cuándo se puede hacer esto?) y observando con un poco de cuidado, es claro que el miembro derecho de la identidad anterior se puede reescribir en la forma:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt \text{sen}(\omega_p t) f(t) = a_0 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt \text{sen}(\omega_p t) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n I_{3,pn} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n I_{1,pn} \quad (1.18)$$

de donde sigue de inmediato el siguiente resultado:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt \text{sen}(\omega_p t) f(t) = \frac{T}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \delta_{pn} \quad (1.19)$$

El miembro derecho de esta igualdad se escribe explícitamente en la forma:

$$\frac{T}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \delta_{pn} = \frac{T}{2} (b_1 \delta_{p1} + b_2 \delta_{p2} + \dots + b_p \delta_{pp} + \dots) \quad (1.20)$$

Recordando la definición de la delta de Kronecker (1.12), es evidente que casi todos los sumandos que se encuentran dentro del paréntesis se anulan y que el único que sobrevive es el término:

$$\frac{T}{2} b_p \delta_{pp} = \frac{T}{2} b_p \quad (1.21)$$

De aquí sigue de inmediato que:

$$b_p = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt \text{sen}(\omega_p t) f(t) \quad (1.22)$$

Un cálculo parecido, permite probar (**ejercicio**) que los coeficientes que restan se calculan según las fórmulas:

$$a_p = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt \cos(\omega_p t) f(t) \quad (1.23)$$

y

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt f(t) \equiv \langle f \rangle \quad (1.24)$$

donde el símbolo $\langle f \rangle$ representa el valor promedio de f .

1.3. El Espacio de las Funciones de Cuadrado Integrable

En este punto vamos a retomar el problema de interpretar la condición $f \in L^2[a, b]$ que aparece en la definición 1. Nuestro objetivo en geofísica (y también en cualquier otra área de ciencias o ingeniería) consiste en estudiar señales que estén asociadas a procesos físicos; estamos interesados, por ejemplo, en estudiar un sismograma. El tipo de señal que nos interesa está usualmente asociado a la propagación de algún tipo de onda, es decir, estamos haciendo una identificación señal \approx onda. Una de las cosas que se discuten en cualquier curso básico de teoría de ondas es la identidad:

$$ENERGIA \propto \int dt POTENCIA \approx \int dt (\psi)^2$$

donde ψ es la amplitud de la onda (señal). Así, la condición de integrabilidad del cuadrado de la señal se corresponde con la condición física de *finitud* de la energía asociada a la onda.

Desde el punto de vista matemático, el conjunto de las funciones de cuadrado integrable sobre un intervalo $L^2[a, b]$ presenta propiedades muy interesantes. La primera de ellas es que tal conjunto constituye un *espacio vectorial* (**ejercicio**: demuestre esta afirmación). La segunda propiedad es aún más interesante y depende de la siguiente definición:

Definición 2 El “producto interno” (o escalar): $\langle \cdot | \cdot \rangle$ de dos funciones de $L^2[a, b]$ está dado por la fórmula:

$$\langle f | g \rangle = \int_a^b f(t) g(t) dt \quad (1.25)$$

Se puede probar (**ejercicio** este es un ejercicio bien difícil que solo recomendamos a los muy interesados) que el par $(L^2[a, b], \langle \cdot | \cdot \rangle)$ constituye un “espacio vectorial con producto interno”, es decir, un conjunto que tiene las propiedades algebraicas del espacio \mathfrak{R}^3 con el producto escalar (\cdot) ordinario. Introduciendo una definición más, podemos añadir propiedades métricas al espacio de las funciones de cuadrado integrable.

Definición 3 La norma de un elemento de $L^2[a, b]$ está dada por la fórmula:

$$\|f\|^2 = \langle f | f \rangle \quad (1.26)$$

Con esta definición, resulta que el triplete $(L^2[a, b], \langle \cdot | \cdot \rangle, \| \cdot \|)$ tiene no sólo las propiedades de un *espacio vectorial con producto interno*, sino que, además, la *norma*, define una noción adecuada de longitud y por lo tanto de distancia, esto a su vez induce una idea de cercanía³ lo que en definitiva lleva a poder hablar de límites. De hecho, se puede probar [3] que $L^2[a, b]$ (de ahora en adelante usaremos esta notación para referirnos al triplete $(L^2[a, b], \langle \cdot | \cdot \rangle, \| \cdot \|)$) constituye un *espacio de Hilbert*. Para no complicar más, diremos de manera más bien intuitiva que:

Definición 4 Un *espacio de Hilbert (EH)* es un *espacio vectorial normado*, cuya *norma* proviene de un *producto interno* y en el que todas las sucesiones que parecen converger, convergen.

La noción anterior parece un poco extraña pero en realidad es bastante sencilla como podremos ver con un ejemplo. Consideremos la siguiente sucesión de números racionales:

$$1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, 1.414214, 1.4241135, \dots$$

evidentemente esta sucesión tiende a $\sqrt{2}$ y acá está la sutileza: como sucesión de números racionales la sucesión no tiene límite ya que $\sqrt{2}$ no es un número racional. Sin embargo, si pensamos en la sucesión como una sucesión de

³dos elementos f y g de L^2 están cerca si y solo si: $\|f - g\| \rightarrow 0$

números reales, el límite está en \Re y por lo tanto la sucesión converge, \Re es un EH.

El hecho de que $L^2[a, b]$ constituya un EH es lo que permite asegurar que las series de Fourier convergen; sin embargo queda una pregunta obvia: ¿En qué sentido es que convergen las series de Fourier? sobre la que volveremos en la sección 1.4. Por el momento, queremos llamar la atención sobre la siguiente observación, si definimos:

$$\phi_0(t) = \sqrt{\frac{1}{T}} \quad (1.27)$$

$$\phi_n(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(\omega_n t) \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.28)$$

$$\theta_n(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \operatorname{sen}(\omega_n t) \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.29)$$

y utilizamos el intervalo $[-T/2, T/2]$ como intervalo de integración en la definición 2, las relaciones de ortogonalidad (1.11)(1.15)(1.16) pueden reexpresarse en la forma

$$\langle \phi_n | \phi_p \rangle = \delta_{np}, \quad \langle \phi_n | \theta_p \rangle = 0, \quad \text{etc} \quad (1.30)$$

y la serie de Fourier de f adopta la forma

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \theta_n(t) \quad (1.31)$$

donde, los coeficientes se calculan según

$$a_p = \langle \phi_p | f \rangle \quad (1.32)$$

$$b_p = \langle \theta_p | f \rangle \quad (1.33)$$

Ahora bien, llendo atrás a las nociones elementales del álgebra lineal recordaremos que si se tiene un espacio vectorial de dimensión N con producto interno \langle, \rangle y un conjunto de N vectores linealmente independientes, \mathbf{v}_k , $k = 1, 2, \dots, N$ siempre es posible utilizar dichos vectores para construir una base ortonormal⁴ \mathbf{u}_ℓ $\ell = 1, \dots, N$ en términos de la cual todo vector se expresa como:

$$\mathbf{w} = \sum_{k=1}^N a_k \mathbf{u}_k, \quad a_p = \langle \mathbf{u}_p | \mathbf{w} \rangle \quad (1.34)$$

⁴el proceso se conoce como ortonormalización de Gramm-Schmidt

de manera que en estos términos podemos entender la serie de Fourier como la expansión del vector f de $L^2[a, b]$ en la base de (∞ !!!) vectores ortogonales $\{\phi_n(t), \theta_n(t)\}$.

Las nociones que hemos discutido hasta ahora se pueden generalizar a funciones con valores complejos introduciendo una modificación en la noción del producto interno.

Definición 5 Dadas dos funciones

$$f_1 : [a, b] \subseteq \mathfrak{R} \rightarrow C, \quad f_2 : [a, b] \subseteq \mathfrak{R} \rightarrow C$$

el producto interno entre ellas se define a través de la fórmula

$$\langle f_1 | f_2 \rangle = \int_a^b f_1^*(t) f_2(t) dt \quad (1.35)$$

1.4. Convergencia Media Cuadrática y Convergencia Uniforme de las Series de Fourier.

Una observación sumamente interesante con respecto a los coeficientes de Fourier es que éstos pueden encontrarse como soluciones a un problema de optimización. En efecto, considérese la siguiente suma *finita* (escrita en notación compacta):

$$S_N = \sum_{n=0}^N a_n \phi_n(t) + \sum_{n=1}^N b_n \theta_n(t) \quad (1.36)$$

Dada una función $f \in L^2[a, b]$ definamos la siguiente función *positiva* de los coeficientes:

$$J_f(a_0, a_1, \dots, a_N; b_0, b_1, \dots, b_N) = \|f - S_N\|^2 \quad (1.37)$$

Y hagámos la siguiente pregunta:

¿cuáles son los valores de los coeficientes que minimizan la función $J_f(a_0, a_1, \dots, a_N; b_0, b_1, \dots, b_N)$?

Antes de intentar dar la respuesta, tratemos de entender el sentido de la pregunta. La función J_f es el cuadrado de la “distancia” entre la función f y la suma S_N , de manera que el problema de minimizar J_f es equivalente al problema de minimizar el cuadrado de la distancia entre la suma S_N y la función f .

Habiendo entendido las cosas podemos dar la solución a nuestra incógnita.

Teorema 2 *La solución al problema de minimización propuesto está dado por las fórmulas (1.32) y (1.33)*

Demostración La demostración queda como ejercicio (basta con buscar los puntos críticos de J_f). ■

El teorema anterior se puede reenumerar de otra forma diciendo que: *la serie de Fourier de una función representa la mejor aproximación a la función en el sentido de los Mínimos Cuadrados*. Desde el punto de vista de la convergencia, se puede probar que cuando se pretende aproximar funciones continuas, las series de Fourier “convergen uniformemente” [4]. Para no complicar las cosas con demasiados tecnicismos, baste con decir que, cuando una sucesión de funciones converge uniformemente a una función continua en un cierto intervalo, la sucesión aproximante se mantiene a una distancia pequeña de la función límite dentro de todo el intervalo. Esto es diferente de lo que ocurre con la convergencia puntual, en que la distancia entre la función límite y la aproximante depende del punto. La importancia de la convergencia uniforme es grande, ya que es en virtud de ella que se puede demostrar la siguiente afirmación:

Teorema 3 *(que no se demostrará) Las series de Fourier pueden derivarse e integrarse término a término.*

1.5. El Fenómeno de Gibbs

En vista de que las funciones que se superponen para calcular la suma de una serie de Fourier son continuas, la convergencia de la serie es necesariamente a una función continua. En consecuencia, resulta evidente que si pretendemos aproximar una función discontinua, debe aparecer algún tipo de anomalía. Esta anomalía se manifiesta en que, en un entorno de la discontinuidad, las sumas parciales de la serie de Fourier oscilan fuertemente alrededor de los valores de la función límite a la izquierda y a la derecha

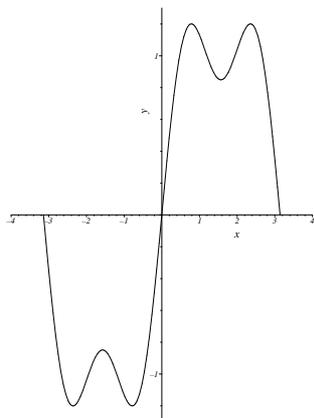


Figura 1.1: La *onda cuadrada* aproximada por la suma de los primeros 2 términos de la serie 1.39

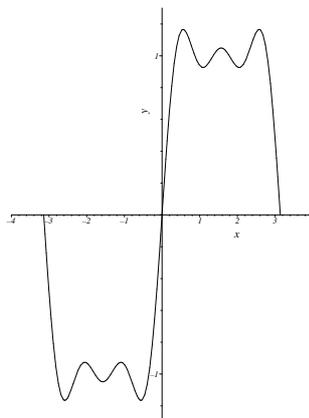


Figura 1.2: Una aproximación mejor, se han tomado en cuenta 3 términos de la serie de Fourier

de la discontinuidad. La observación notable, consiste en que es *imposible* atenuar estas oscilaciones aún en el límite en que el número de términos en la suma parcial de la serie tienda a infinito.

Para ilustrar el fenómeno recurriremos a un ejemplo, consideremos la extensión periódica de la función

$$F(t) \equiv \begin{cases} -1 & \text{si } -\pi < t < 0 \\ +1 & \text{si } 0 < t < \pi \end{cases} \quad (1.38)$$

que evidentemente representa lo que usualmente se denomina “onda cuadrada” cuya serie de Fourier está dada por la fórmula (**ejercicio**):

$$S(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \text{sen} [(2m+1)t] \quad (1.39)$$

Al sumar algunos términos de la serie obtenemos los resultados que se observan en las figs (1.1)(1.2) y (1.3)

1.6. Series de Fourier Exponenciales

En esta sección vamos a extender los resultados anteriores a funciones complejas de cuadrado integrable. Con el fin de motivar la discusión, consid-

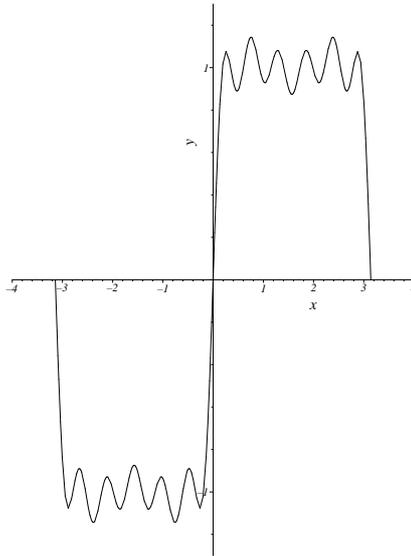


Figura 1.3: Acá se está graficando la suma de los primeros 6 términos de la serie 1.39, es claro que la aproximación mejora al incluir términos de alta frecuencia, sin embargo cerca de la discontinuidad se mantiene la anomalía asociada al fenómeno de Gibbs

eremos una función periódica real de cuadrado integrable y su desarrollo en serie de Fourier trigonométrica:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}(\omega_n t) \quad (1.40)$$

Si definimos las cantidades complejas: ($i = \sqrt{-1}$):

$$\alpha_0 = \frac{a_0}{2} \quad (1.41)$$

$$\alpha_p = \frac{a_p - ib_p}{2}, p \neq 0 \quad (1.42)$$

podemos reescribir la serie original de la siguiente manera

$$f(t) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n + \alpha_n^*) \cos(\omega_n t) + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n - \alpha_n^*) i \text{sen}(\omega_n t) \quad (1.43)$$

o reordenando términos y utilizando la notación compacta de la sección anterior:

$$f(t) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (\phi_n(t) + i\theta_n(t)) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^* (\phi_n(t) - i\theta_n(t)), \quad (1.44)$$

este último resultado puede reducirse un poco más utilizando exponenciales complejas para obtener

$$f(t) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{i\omega_n t} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^* e^{-i\omega_n t} \quad (1.45)$$

De la definición de los coeficientes (α_n , $n = 0, 1, \dots$) se deduce (esta propiedad sólo es cierta para funciones reales) que:

$$\alpha_{-n} = \alpha_n^* \quad (1.46)$$

lo que permite escribir finalmente:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{i\omega_n t} \quad (1.47)$$

o en términos de la definición:

$$\psi_n(t) = \phi_n(t) + i\theta_n(t) = e^{i\omega_n t} \quad (1.48)$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \psi_n(t) \quad (1.49)$$

Esta última expresión muestra cómo puede representarse a una función periódica real en términos de una serie de exponenciales complejas, este resultado puede extenderse a la representación en serie de funciones en términos no solo de funciones trigonométricas ó exponenciales complejas sino a otras "bases como veremos a continuación. Por el momento nos limitaremos a llamar la atención acerca de que utilizando el producto que hemos definido hasta ahora

$$\langle \psi_\ell | \psi_n \rangle = T \delta_{\ell n} \quad (1.50)$$

lo que implica que los coeficientes de Fourier complejos (α_n) se calculan según:

$$\alpha_p = \frac{1}{T} \langle \psi_p | f \rangle \quad (1.51)$$

1.7. Bases Ortonormales

En las secciones anteriores hemos discutido las bases trigonométricas y exponenciales del espacio de las funciones de cuadrado integrable. Es claro que estas funciones de base no son de módulo unitario ($\|\dots\|^2 = \langle \dots | \dots \rangle = 1$) y esto produce los molestos factores $1/\langle \dots | \dots \rangle$ en el cálculo de los coeficientes. Estos factores desaparecen si introducimos bases ortonormales a través de la simple definición (el símbolo sustituye a cualquier función de base que se quiera normalizar).

$$\otimes_n(t) \rightarrow \otimes_n / \langle \otimes_n | \otimes_n \rangle$$

Las relaciones de ortogonalidad y los coeficientes de Fourier se calculan de forma más sencilla, como veremos en los ejercicios. En el siguiente capítulo nos dedicaremos a discutir un conjunto de relaciones interesantes que permiten expresar el hecho de que un conjunto de funciones constituye una base completa. Antes de entrar en esa discusión veamos un poco más acerca de lo que entenderemos por la palabra “filtro”.

1.8. Dos Filtros Conocidos: La Derivada y La integral:

Consideremos una función f y la operación (D) que a esta función hace corresponder su derivada:

$$f \xrightarrow{D} \frac{df}{dt} \quad (1.52)$$

Esta operación manda a un conjunto particular de funciones en otro de forma lineal, esto es:

$$D : F \rightarrow F \quad (1.53)$$

linealmente, es decir, que para cada par de funciones f y g y para toda constante α la siguiente relación es cierta:

$$D(f + \alpha g) = D(f) + \alpha D(g) \quad (1.54)$$

Para todos nuestros fines, cualquier operación con esta característica (LINEALIDAD) se denomina un FILTRO. De hecho, y para ser definitivos en la nomenclatura, en todo lo que sigue las siguientes expresiones (o palabras) serán sinónimos:

OPERADOR LINEAL – FILTRO – OPERADOR

Observemos que, según estos términos, la integración también es un filtro, en efecto, la integración es una operación lineal sobre el espacio de las funciones y por lo tanto constituye un filtro.

Es importante señalar que los mismos filtros pueden tener formas aparatosamente diferentes cuando se aplican en diferentes representaciones (dominios) de los objetos sobre los que actúan. Para entender un poco mejor esta afirmación, consideremos de nuevo el filtro derivador (D). En el dominio del tiempo (esto es, entendiendo a la función como función del tiempo), el operador de derivada es un filtro de “dos puntos“. En efecto, dado un parámetro pequeño h ($h \rightarrow 0$) el operador D se define según:

$$D[f](t) = \dot{f}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \quad (1.55)$$

Esto constituye lo que se denomina un *filtro de dos puntos* porque necesito los valores de f en dos puntos diferentes ($t+h$ y t) para obtener el valor de $D(f)$ en t . En el dominio de la frecuencia (esto es, luego de efectuar el análisis espectral de f y entender a la serie de Fourier como una función de los coeficientes) y suponiendo funciones periódicas, si f y su derivada se representan por:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \psi_n(t) \quad (1.56)$$

$$\frac{df}{dt}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{a}_n \phi_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{b}_n \psi_n(t) \quad (1.57)$$

el filtro D actúa sobre el conjunto de coeficientes $\{a_n, b_n\}$ para producir el conjunto de coeficientes $\{\hat{a}_n, \hat{b}_n\}$ en la forma (**ejercicio:** ¿por qué?):

$$D(\{a_n, b_n\}) = \{\hat{a}_n, \hat{b}_n\} \quad (1.58)$$

$$\hat{a}_n = \omega_n b_n, \quad \hat{b}_n = -\omega_n a_n \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.59)$$

Ejercicio 3 *Describe en palabras el efecto del filtro diferenciador sobre una serie de Fourier. ¿Qué ocurre con la componente de frecuencia nula?*

Ejercicio 4 *¿Qué puede decir de la integración?, ¿es un filtro?, en caso afirmativo, ¿cómo actúa?*

1.9. Problemas

1. Encuentre la Serie de Fourier de las continuaciones periódicas de las siguientes funciones (Nota: hay una forma fácil de hacer esto):

$$a) \quad f(t) = \begin{cases} -t & \text{si } t \in (-\pi, 0) \\ t & \text{si } t \in (0, \pi) \end{cases}$$

$$b) \quad f(t) = \begin{cases} \frac{t}{\pi} + 1 & \text{si } t \in (-\pi, 0) \\ \frac{t}{\pi} & \text{si } t \in (0, \pi) \end{cases}$$

2. ¿Cuál de las series que acaba de calcular tiene las mejores propiedades de convergencia?; ¿por qué?. Sugerencia: Escriba un par de programitas para graficar las funciones que está estudiando y entender mejor lo que ocurre.
3. Demuestre que si una función es par los coeficientes de Fourier $\{b_n\}$ son todos nulos, ¿Qué ocurrirá en el caso de las funciones impares?.
4. Demuestre la fórmula (teorema) de Bessel-Parseval: dada una función periódica con valores reales de cuadrado integrable, la siguiente es una identidad:

$$\int_{-T/2}^{T/2} dt f^2(t) = \sum_n a_n^2 + b_n^2$$

¿ Puede dar una interpretación física de esto? ¿ Qué puede decir desde un punto de vista geométrico? .

5. Considere las exponenciales complejas discutidas en la sección 1.6. Demuestre que utilizando el producto interno hermítico, estas exponenciales satisfacen las relaciones de ortogonalidad:

$$\langle \psi_p | \psi_n \rangle = T \delta_{pn}$$

y que, en consecuencia, los coeficientes de Fourier (α_n) se calculan según:

$$\alpha_p = \frac{1}{T} \langle \psi_p | f(t) \rangle$$

6. Generalice la fórmula de Bessel-Parseval para funciones con valores complejos.

7. Considere la continuación periódica de la función: $f(t) = t^2$ si $t \in (-\pi, \pi)$
- Encuentre la serie de Fourier de esta función.
 - Evalue la serie en $t=\pi$ para demostrar la igualdad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

8. Grafique las sumas parciales de la serie que representa a la onda cuadrada, trate de evaluar el "overshoot" (Δ), es decir, la diferencia entre el máximo valor que toma la suma (S_k) de los primeros k términos de la serie y el valor máximo de la onda cuadrada, es decir, trate de medir $\Delta \equiv \max(S_k) - 1$.

14:

Capítulo 2

La Delta (δ) de Dirac y la Relación de Clausura

2.1. Definición de la δ de Dirac

Vamos a comenzar este capítulo (bastante corto por cierto) discutiendo algunas propiedades de una función bastante simple:

$$\Delta_\epsilon(t - \tilde{t}) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & \text{si } t \in \left(\tilde{t} - \frac{\epsilon}{2}, \tilde{t} + \frac{\epsilon}{2}\right) \\ 0 & \text{si } t \notin \left(\tilde{t} - \frac{\epsilon}{2}, \tilde{t} + \frac{\epsilon}{2}\right) \end{cases} \quad (2.1)$$

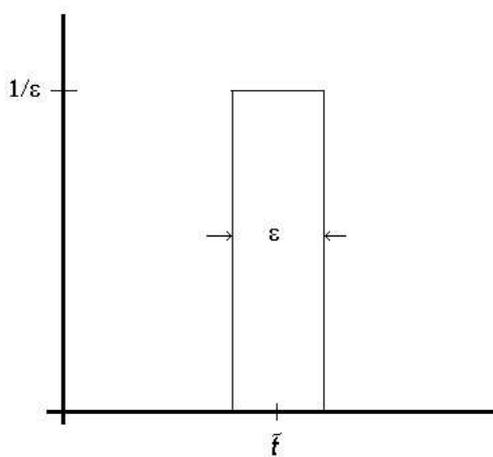
El gráfico de esta función consiste en un rectángulo de ancho ϵ y altura $1/\epsilon$ cuya base está centrada en el punto \tilde{t} como muestra la figura 2.1.

Ciertamente, para todo valor real de ϵ , el área bajo el grafo de la función es 1; sin embargo, es interesante notar que aún cuando esto sigue siendo cierto para $\epsilon \rightarrow 0$, en este límite Δ_ϵ deja de ser una función en el sentido estricto. En efecto, ¿qué sentido tiene decir que la imagen de \tilde{t} bajo Δ_ϵ es infinito?. Claramente, esto es curioso, pero mientras nos mantengamos alejados de este límite todo está bien definido y no hay ningún problema.

Consideremos adicionalmente una función analítica en \tilde{t} , esto es, una función expresable como una serie de potencias alrededor de dicho punto:

$$f(t) = f^{(0)}(\tilde{t}) + f^{(1)}(\tilde{t})(t - \tilde{t}) + \frac{1}{2!}f^{(2)}(\tilde{t})(t - \tilde{t})^2 + \dots \quad (2.2)$$

Pretendemos calcular el límite impropio:

Figura 2.1: La función $\Delta_\epsilon(t - \tilde{t})$

$$I = \int_{\mathfrak{R}} dt f(t) \left[\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Delta_\epsilon(t - \tilde{t}) \right] \quad (2.3)$$

Es decir: *¡¡¡ queremos calcular la integral del producto de f por Δ_ϵ en el límite en que este último objeto carece de sentido como función !!!*. En la región en la cual el cálculo tiene sentido ($\epsilon \neq 0$), la integral converge de forma adecuada, en consecuencia, podemos tanto invertir el orden de integración y cálculo del límite, como sustituir a f por la serie que la representa. Efectuando estas dos operaciones, la integral se puede escribir en la forma:

$$I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathfrak{R}} dt \left[f^{(0)}(\tilde{t}) + f^{(1)}(\tilde{t})(t - \tilde{t}) + \frac{1}{2!} f^{(2)}(\tilde{t})(t - \tilde{t})^2 + \dots \right] \Delta_\epsilon(t - \tilde{t}) \quad (2.4)$$

que luego de un cambio de variables elemental y del uso de la definición de Δ_ϵ , se reduce a la siguiente integración (que puede realizarse término a término)

$$I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}} d\xi \left[f^{(0)}(\tilde{t}) + f^{(1)}(\tilde{t}) \xi + \frac{1}{2!} f^{(2)}(\tilde{t}) \xi^2 + \dots \right] \quad (2.5)$$

La integración se efectúa de forma inmediata para obtener

$$I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left(\xi f^{(0)}(\tilde{t}) + \frac{2\epsilon^3}{3!} f^{(2)}(\tilde{t}) + \dots \right) \quad (2.6)$$

que claramente es un límite regular convergente al valor:

$$I = f(\tilde{t}) \quad (2.7)$$

Definición 6 La distribución delta de Dirac, se define como el valor del límite impropio

$$\delta(t - \tilde{t}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Delta_\epsilon(t - \tilde{t}) \quad (2.8)$$

En términos algo pictóricos y ciertamente imprecisos, puede decirse que la δ de Dirac debe entenderse como un pico altísimo de anchura cero localizado exactamente en el punto \tilde{t} . La definición que acabamos de dar posee algún valor operativo para ciertas aplicaciones, sin embargo, desde el punto de vista teórico es mejor decir que

Definición 7 La “función” (distribución) δ es el único objeto con la propiedad de que para toda función integrable f y todo intervalo I se satisface la siguiente identidad:

$$\int_I dt f(t) \delta(t - a) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \notin I \\ f(a) & \text{si } a \in I \end{cases} \quad (2.9)$$

En este punto vale la pena destacar un par de observaciones, la primera es el hecho de que la δ de Dirac corresponde a una versión continua de la δ de Kronecker, y la segunda, el hecho de que la delta es dimensional (si t representa una variable temporal, la delta tiene dimensiones de 1/tiempo).

2.2. La Relación de Completitud

Recordemos la expresión de una función periódica de cuadrado integrable en términos de una serie de Fourier de exponenciales complejas:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{i\omega_n t} \quad (2.10)$$

Si en esta expresión sustituimos directamente el valor de los coeficientes en términos de las integrales adecuadas, resulta la siguiente expresión explícita

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} ds f(s) e^{-i\omega_n s} \right\} e^{i\omega_n t} \quad (2.11)$$

Intercambiando el orden de suma e integración, la igualdad anterior se puede reescribir en la forma

$$f(t) = \int_{-T/2}^{T/2} ds f(s) \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{-i\omega_n s} e^{i\omega_n t} \right\} \quad (2.12)$$

Definiendo el núcleo o “kernel“ de la integral como

$$K(t, s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_n s} e^{i\omega_n t} \quad (2.13)$$

es claro que la expresión se reduce a la simple fórmula:

$$f(t) = \int_{-T/2}^{T/2} ds f(s) K(t, s) \quad (2.14)$$

válida para toda función periódica. Recordando la definición 7 de la δ de Dirac, es claro que el último resultado implica la identidad

$$K(t, s) = \delta_p(t - s) \quad (2.15)$$

donde δ_p es la extensión periódica de la delta¹. Esta identidad es conocida como relación de cierre (o relación de completitud o relación de clausura) y es la expresión analítica del hecho de que las exponenciales complejas conforman una base del espacio de Hilbert de las funciones periódicas de cuadrado integrable.

¹en forma desarrollada la relación de clausura para las exponenciales complejas es

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_n s} e^{i\omega_n t} = T\delta_p(t - s)$$

2.3. Problemas

1. Considere la campana de Gauss:

$$g_{\tilde{t},\sigma}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\tilde{t})^2}{2\sigma^2}}$$

- a) Grafique esta función para diferentes valores de σ y \tilde{t}
 b) Demuestre que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt g(t) = 1$$

- c) Demuestre que:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} g_{\tilde{t},\sigma}(t) = \delta(t - \tilde{t})$$

2. Repita el ejercicio anterior con la curva “Lorentziana”

$$L_{\tilde{t},T}(t) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{T}{(t - \tilde{t})^2 + T^2} \right]$$

3. ¿Puede generalizar el resultado obtenido en los dos ejercicios anteriores? (si no se le ocurre algo lea la referencia [3])
 4. Muestre que la relación de clausura se puede encontrar buscando los coeficientes de Fourier del desarrollo de δ .
 5. Escriba un programa que muestre la relación de cierre para el caso de funciones pares periódicas.
 6. Demuestre que:

$$\int_{\mathbb{R}} dt f(t) \frac{d\delta(t - \tilde{t})}{dt} = - \left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{\tilde{t}}$$

Capítulo 3

Transformación de Fourier

En el capítulo 1 hemos aprendido como es posible descomponer una señal periódica de energía finita en sus componentes espectrales. Lamentablemente, las señales que se comportan en forma periódica son pocas y cabe preguntarse acerca de la posibilidad de construir una descomposición espectral de una señal no periódica.

La respuesta a esta inquietud viene dada en términos de la transformación de Fourier, que consiste en una generalización que permite efectuar el análisis (descomposición) espectral de señales no periódicas de energía finita. El análisis de Fourier de las señales de este tipo obliga a pensar en la frecuencia como una nueva variable continua.

3.1. La Transformada de Fourier: Definición

Como recién hemos comentado, pretendemos estudiar señales no periódicas en general. Para poder entrar en tal programa es necesario generalizar la definición 1 para extenderla al conjunto de las funciones de cuadrado integrable sobre los reales.

Definición 8 *Se dice que una función de variable real y valores complejos ($f : \mathfrak{R} \rightarrow C$) es de cuadrado integrable ($f \in L^2(\mathfrak{R})$) sobre los reales si y sólo si f satisface la condición:*

$$\int_{\mathfrak{R}} f^*(t)f(t)dt = \int_{\mathfrak{R}} |f(t)|^2 dt < \infty \quad (3.1)$$

Evidentemente, esta definición describe a las señales no periódicas cuya energía total es finita y por lo tanto es de relevancia fundamental para toda la discusión posterior. Por cierto que no resulta difícil darse cuenta de que una función $f \in L^2(\mathfrak{R})$ debe decaer fuertemente tanto en el *pasado* como en el *futuro* remotos, es decir, debe tener la siguiente propiedad:

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0 \quad (3.2)$$

Vamos a tratar de aproximarnos al problema del análisis espectral de una función de cuadrado integrable de forma intuitiva. Con este fin, consideremos una función $f \in L^2(\mathfrak{R})$ e introduzcamos una función auxiliar f_T definida la siguiente manera, f_T es una función periódica de período T que coincide con f en el intervalo $(-T/2, T/2)$.

Como consecuencia del hecho de que f es de energía finita $f_T \in L^2[-T/2, T/2]$ y por lo tanto admite el desarrollo de Fourier

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{i\omega_n t} \quad (3.3)$$

ó, si substituimos explícitamente los coeficientes (ver problemas del capítulo 1):

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\omega_n t} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} d\xi f(\xi) e^{-i\omega_n \xi} \right) \quad (3.4)$$

Recordando la definición de los subarmónicos de la frecuencia fundamental, es fácil escribir la siguiente identidad:

$$\omega_{n+1} - \omega_n = \frac{2\pi}{T} \quad (3.5)$$

a partir de la cual se puede encontrar una expresión para el recíproco del período en términos de la diferencia entre dos subarmónicos consecutivos:

$$\frac{1}{T} = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \quad (3.6)$$

Podemos substituir esta expresión en la fórmula (3.4) para obtener:

$$f_T(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\Delta\omega}{2\pi} e^{i\omega_n t} \int_{-T/2}^{T/2} d\xi f(\xi) e^{-i\omega_n \xi} \right) \quad (3.7)$$

Ahora bien, debido a la definición de f_T , si tomamos períodos cada vez más largos ($T \rightarrow \infty$), ocurrirá que:

1. F_T se acercará cada vez más a f , esto es:

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f_T \rightarrow f$$

2. El conjunto de las frecuencias subarmónicas $\{\omega_n\}$ se hace continuo de manera que $\Delta\omega \rightarrow 0$ y por lo tanto los límites de la integración y la suma cambian como sigue:

$$\int_{-T/2}^{T/2} d\xi \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \quad \text{y} \quad \sum_{-\infty}^{\infty} \Delta\omega \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \quad (3.8)$$

En definitiva, y sin pretender que la argumentación sea rigurosa, hemos encontrado una expresión integral para f .

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega t} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi f(\xi) e^{-i\omega \xi} \right] \quad (3.9)$$

Esta expresión integral resume la forma en que deben efectuarse el análisis y síntesis espectrales de una señal no periódica de cuadrado integrable. En la igualdad (3.9), podemos identificar la integral dentro del corchete como el equivalente continuo de los coeficientes de Fourier de la señal aperiódica. En efecto, cada una de las componentes armónicas (discretas) $\{e^{i\omega_n t}\}$ de una señal periódica g tiene un peso dado por el correspondiente coeficiente de Fourier $\{\alpha_n\}$ en el desarrollo de g . En definitiva, hemos encontrado que en el caso de las funciones aperiódicas, la siguiente función $\hat{f}(\omega)$ de la variable continua ω :

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi f(\xi) e^{-i\omega \xi} \quad (3.10)$$

que se denomina *Transformada de Fourier de f* , permite efectuar la síntesis espectral de f según la fórmula:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t} \hat{f}(\omega) \quad (3.11)$$

que constituye la *Transformada de Fourier inversa*.

Evidentemente, la transformada de Fourier de una señal es una señal compleja, de tal manera que es posible representar \hat{F} en las dos formas equivalentes:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \Re(\hat{f}(\omega)) + \Im(\hat{f}(\omega)) \\ &= A(\omega) \exp^{i\varphi(\omega)} \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde como es usual, las funciones de amplitud (o espectro de potencia) y de fase están dadas por las fórmulas:

$$A(\omega) = \sqrt{\Re^2(\hat{f}(\omega)) + \Im^2(\hat{f}(\omega))} \quad (3.13)$$

$$\varphi(\omega) = \tan^{-1} \left[\frac{\Im(\hat{f}(\omega))}{\Re(\hat{f}(\omega))} \right] \quad (3.14)$$

Ejemplo 4 *Calculo de la transformada de Fourier de la función¹:*

$$f(t) = e^{-a|t|} \quad (3.15)$$

Evidentemente esta función es par propiedad que puede ser aprovechada para escribir la siguiente expresión explícita para $\hat{F}(\omega)$:

$$\begin{aligned} \hat{f}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-a|t|} e^{i\omega t} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dt e^{-at} \left(\frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \right) = \\ &= I_+ + I_- \end{aligned} \quad (3.16)$$

Ahora bién, al evaluar cualquiera de las dos integrales que aparecen en el resultado anterior se obtiene trivialmente:

¹obsérvese que (ejercicio) $f \in L^2(\mathfrak{R})$

$$I_{\pm} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{a \mp i\omega} e^{-(a \mp i\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{a \mp i\omega} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{a \pm i\omega}{a^2 + \omega^2} \quad (3.17)$$

de donde sigue el resultado final

$$\hat{f}(\omega) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{a}{a^2 + \omega^2} \quad (3.18)$$

El resultado obtenido es una función real y par de la frecuencia.

3.2. Fórmula de Inversión

En esta sección vamos a utilizar las propiedades de la δ de Dirac para demostrar formalmente la fórmula de inversión. Cabe señalar que, salvo por algunos detalles técnicos concernientes a los conjuntos de funciones adecuados y a la representación de la δ , la prueba que se va a presentar es totalmente válida, aunque difiere bastante de la demostración clásica [1]. A pesar de su simplicidad, la prueba que va a presentarse puede ser simplificada aún más con el uso de algunas herramientas más poderosas que van a introducirse en el capítulo 4; sin embargo, para no romper de una vez con el esquema y la notación que se utilizan en la mayoría de las referencias, vamos a discutir un poco la construcción usual.

Para poder ir sobre la prueba, es necesario establecer la versión continua de la relación de cierre; esto lo haremos presentando un teorema cuya demostración no daremos aquí.

Teorema 4 (*Relación de clausura*) la δ de Dirac admite la siguiente representación

$$\delta(t - \tilde{t}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-i\xi(t-\tilde{t})} \quad (3.19)$$

Con la relación de clausura en la mano podemos pasar de inmediato a demostrar el teorema de inversión de Fourier, que enunciaremos a continuación

Teorema 5 *La fórmula de Transformación de Fourier:*

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi f(\xi) e^{-i\omega\xi} \quad (3.20)$$

es inversible y su inversa está dada por:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t} \hat{f}(\omega) \quad (3.21)$$

Demostración Consideremos la integral

$$I(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi f(\xi) e^{-i\omega\xi} \right] \quad (3.22)$$

Invirtiendo el orden de integración y agrupando adecuadamente los términos en el integrando se obtiene el siguiente resultado intermedio

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi f(\xi) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega(t-\xi)} \right] \quad (3.23)$$

que luego de apelar a la representación integral de la δ de Dirac y a las propiedades de tal objeto, permite obtener finalmente el resultado que queríamos probar.

$$I(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi f(\xi) \delta(t - \xi) = f(t)!!! \quad (3.24)$$

■

3.3. Derivación e Integración: otra visita

Consideremos una función $f(t)$ y calculemos la transformada de Fourier de su derivada con respecto al tiempo \dot{f} , es decir, tratemos de calcular:

$$F[\dot{f}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{df}{ds} e^{-i\omega s} \quad (3.25)$$

al usar integración por partes y utilizar que $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$ resulta

$$\begin{aligned} F[\dot{f}] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [f(s)e^{-i\omega s}]|_{-\infty}^{\infty} + \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} ds f(s) e^{-i\omega s} = \\ &= \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} ds f(s) e^{-i\omega s} = i\omega \hat{f}(\omega) \end{aligned} \quad (3.26)$$

de esta manera hemos probado que la transformada de Fourier de la derivada de una función se consigue multiplicando a la función por la función $i\omega$, invitamos al lector a comparar este resultado con la solución que debe haber dado al ejercicio 4 que aparece en el capítulo 1.

Pensando en términos abstractos, es evidente que la integración es la operación inversa a la derivación lo que implica la relación

$$F\left[\int_{t_0}^t f(s)ds\right] = -\frac{i\hat{f}(\omega)}{\omega} \quad (3.27)$$

Ejercicio 5 ¿Ve algún problema inmediato en esta operación?

3.4. La Relación Fundamental Entre Ancho Temporal y Ancho de Banda en Frecuencia.

En esta sección vamos a comentar informalmente acerca de lo que en Mecánica Cuántica se denomina principio de incertidumbre, y que en el análisis de señales establece una relación de enorme importancia entre una señal descrita en el dominio del tiempo, y su transformada de Fourier. Volveremos sobre este tema en el siguiente capítulo, en donde presentaremos una demostración completa del resultado.

Consideremos una señal f de cuadrado integrable que tenga una anchura típica dada por Δt (ver figura). El principio de incertidumbre establece que el ancho típico de la transformada de Fourier \hat{F} de dicha señal tendrá un ancho típico $\Delta\omega$ que satisface la relación:

$$\Delta t \Delta\omega \geq 1 \quad (3.28)$$

Un ejemplo de esto lo representa una exponencial compleja monocromática; tal señal está dada por la fórmula:

$$f(t) = e^{i\omega_0 t} \quad (3.29)$$

que representa una onda armónica de una sola frecuencia. Trivialmente, la transformada de Fourier de esta señal está dada por:

$$\hat{f}(\omega) = \delta(\omega - \omega_0) \quad (3.30)$$

ciertamente, el ancho de banda en frecuencia de esta función es nulo ($\Delta\omega = 0$), mientras que la función representada en el dominio del tiempo ocupa todo el dominio temporal ($\Delta t = \infty$). Otro ejemplo típico es la campana de Gauss sobre la cual se investigará un poco en la sección de problemas (véase el problema 6).

3.5. Un ejemplo importante

La curva *Gaussiana*, *campana de Gauss* o *distribución normal* que introdujimos en la sección de problemas del capítulo 2 es una función de variable real con valores reales dada por la fórmula

$$g_{\tilde{t},\sigma}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\tilde{t})^2}{2\sigma^2}} \quad (3.31)$$

Donde σ es una constante. Esta función es de importancia fundamental en probabilidades y estadística donde aparece como actor principal en el *teorema del límite central*. En esta sección vamos a proponer un problema guiado que nos permitirá comentar algunas propiedades de la distribución normal con el fin de reforzar las nociones que hemos introducido en este capítulo, antes de comenzar recordemos que la distribución normal es una función *normalizada* en el sentido de que su integral sobre todo los reales es 1 ($\int_{-\infty}^{\infty} g_{\tilde{t},\sigma} = 1$).

Como primer ejercicio estudiaremos el ancho de la gaussiana, para comenzar la discusión tomaremos como definición temporal que el ancho (Δt) de la gaussiana es la distancia entre los dos puntos en que los valores de la curva caen por debajo de la fracción $1/\sqrt{e} \approx 0,60653$ del valor máximo de $g_{\tilde{t},\sigma}$. La primera parte del problema consiste en convencerse de que $\Delta t = \sigma$? (**hágalo**).

Nuestro segundo objetivo consiste en calcular la transformada de Fourier de la distribución normal, para ello vamos a tomar una ruta indirecta que utiliza algunas de las propiedades de la integral de Fourier. Comenzaremos por proponerle que *demuestre* que la curva normal satisface la ecuación diferencial (para sencillez del cálculo asuma que $\tilde{t} = 0$)

$$\frac{dg_{0,\sigma}(t)}{dt} + \frac{t}{\sigma^2} g_{0,\sigma}(t) = 0 \quad (3.32)$$

El siguiente paso es invitarlo a calcular la transformada de Fourier de esta

ecuación para que encuentre una nueva ecuación diferencial para la transformada de Fourier ($\hat{G}(\omega)$) de la gaussiana, a partir de esta nueva ecuación usted deberá probar (esta parte es realmente sencilla, piense antes de calcular) que

$$\hat{G}(\omega) = A e^{-\frac{\sigma^2 \omega^2}{2}} \quad (3.33)$$

donde A es una constante que puede calcularse examinando el valor de $\hat{G}(\omega)$ en $\omega = 0$. Si hizo el trabajo con dedicación habrá probado rigurosamente la siguiente relación

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\sigma^2 \omega^2}{2}} \quad (3.34)$$

donde el símbolo \Leftrightarrow denota que ambas funciones son "pares de Fourier".

Por cierto que, como corolario de este ejercicio resulta claro que los anchos de banda en tiempo y en frecuencia satisfacen la relación fundamental

$$\Delta x \Delta \omega \geq 1 \quad (3.35)$$

Finalmente, vamos a afinar un poco más la noción del ancho, con este objetivo en mente nos permitiremos introducir un par de conceptos de probabilidades. Una función real de variable real no negativa $f(x)$ que satisface la propiedad $\int_{\mathfrak{R}} dx f(x) = 1$ se denomina "distribución de probabilidad" permite el cálculo de la media (y otros momentos estadísticos) de la variable aleatoria x . La media de x con respecto a $f(x)$ está dada por $\langle x \rangle_f = \int_{\mathfrak{R}} dx x f(x)$, mientras que la media del cuadrado de x ($\langle x^2 \rangle_f$) y la desviación media cuadrática (s) están definidos por las fórmulas

$$\langle x^2 \rangle_f = \int_{\mathfrak{R}} dx x^2 f(x) \quad (3.36)$$

$$s_f = \sqrt{\langle x \rangle_f^2 - \langle x^2 \rangle_f} \quad (3.37)$$

Con estas definiciones ¿cuáles serán los valores de $\langle t \rangle_g$ y s_g para la gaussiana?

En el caso de la gaussiana (y de cualquier otra distribución de probabilidad), la definición rigurosa del ancho de banda está dada por Δt no es otra cosa que la desviación cuadrática media.

3.6. Problemas.

1. Encuentre la transformada de Fourier de las siguientes funciones (A , T , a y ω_0 son constantes reales, $H(t)$ es la función escalón):

a)

$$I(t) = \begin{cases} A & \text{si } t \in I \\ 0 & \text{si } t \notin I \end{cases}$$

donde I es el intervalo: $I = (-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$

b)

$$f(t) = \frac{1}{T^2 + t^2}$$

c)

$$f(t) = \cos(\omega_0 t)$$

d)

$$f(t) = \cos(\omega_0 t)e^{-a|t|}$$

e)

$$f(t) = H(t)e^{-a|t|}$$

2. “Fórmula de Plancherel”: Demuestre la igualdad de la energía calculada en los dominios de tiempo y frecuencia

$$\int_{\mathfrak{R}} dt f(t)^* f(t) = \int_{\mathfrak{R}} d\omega \hat{f}(\omega)^* \hat{f}(\omega)$$

Verifique la fórmula de Plancherel para las funciones que estudió en el problema anterior. ¿Encuentra alguna similitud con los resultados del capítulo 1?

3. Se dice que una señal es de “fase cero” si su espectro de fase es idénticamente nulo. Demuestre que toda señal real y par es de fase cero.
4. Demuestre las siguientes propiedades de la transformada de Fourier

a) (“shifting”)

$$F[f(t - t_0)] = e^{i\omega_0 t} F[f(t)]$$

Comente este resultado en términos de la fase de \hat{F} .

b)

$$F\left[\frac{d^n f}{dt^n}\right] = (i\omega)^n F[f]$$

¿Puede comentar algo con respecto a esto (recuerde lo que se discutió en el capítulo 1 en referencia a los filtros de diferenciación).

c)

$$F[t^n f(t)] = \left(i^n \frac{d^n}{d\omega^n}\right) F[f]$$

5. Encuentre la transformada de Fourier de las siguientes funciones:

$$f(t) = t^n$$

$$f(t) = \sum_{n=0}^N a_n t^n$$

6. Considere la transformada de Fourier en 2+1 dimensiones (en notación primitiva) que manda al dominio (x, y, t) en el dominio (k_x, k_y, ω) :

$$\hat{F}(k_x, k_y, \omega) = \int_{\mathbb{R}^{2+1}} d^2x dt f(x, y, t) e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)}$$

Use el material de este capítulo y un poco de imaginación para demostrar que en el “dominio $k - \omega$ ”, la ecuación de ondas homogénea:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) f(x, y, t) = 0$$

se transforma en:

$$\left(k_x^2 + k_y^2 - \frac{\omega^2}{v^2}\right) \hat{F}(k_x, k_y, \omega) = 0$$

7. Considérese una función $f(t)$ de “crecimiento exponencial” (esto es: $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)e^{-t} = 0$). Se define la transformada de Laplace de $f(t)$ según:

$$\mathcal{L}[f] \equiv \int_0^{\infty} dt f(t) e^{-st}$$

- a) Encuentra alguna forma de relacionar este objeto con la transformada de Fourier $\hat{f}(\omega)$.
- b) ¿Cuál será la transformada de Laplace de la derivada de $f(t)$ ($\mathcal{L}[\frac{df}{dt}]$)?
- c) ¿Puede generalizar el resultado para derivadas de orden superior?
- d) Aplique el resultado de la parte (c) para resolver la ecuación diferencial (el oscilador armónico amortiguado)

$$\ddot{x} - 2\beta\dot{x} + \omega_0^2x = 0$$

sujeta a las condiciones iniciales: $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$ [se vale que use una tabla de transformadas de Laplace].

- e) Repita el ejercicio anterior para la “ecuación forzada”:

$$\ddot{x} - 2\beta\dot{x} + \omega_0^2x = A_0 \cos(\omega t)$$

y discuta el problema de “resonancia” (f); investigue las posibilidades de aplicación de estos resultados para el diseño de sismógrafos y geófonos.

Capítulo 4

Convolución y Correlación

En este capítulo vamos a definir un par de operaciones entre funciones cuya importancia, tanto para el análisis de señales como para el estudio de los sistemas lineales (continuos y discretos), es fundamental. En el caso de la geofísica, estas operaciones permiten, entre otras aplicaciones, calcular sismogramas sintéticos, filtrar datos potenciales (gravimétricos y magnéticos), y encontrar ecuaciones para estimar la distribución espectral de una fuente sísmica.

4.1. Definición de la Convolución

La primera operación que vamos a definir se denomina Convolución, y se denota por un asterisco (*).

Definición 9 *Dada dos funciones de variable real y valores reales (f y g) se define la convolución entre ellas como una nueva función definida a través de la siguiente integral (en caso de que exista):*

$$h(t) = f * g \equiv \int_{\mathbb{R}} f(t-s)g(s)ds \quad (4.1)$$

Es importante observar que la integral que aparece en la definición de la convolución es una integral impropia, y que, en consecuencia, puede ocurrir que la convolución entre f y g no exista. Por el momento, supondremos que no hay problema con la convergencia de la integral (y que por lo tanto la convolución existe), y dentro de esta hipótesis, examinaremos algunos teoremas

interesantes. Volveremos sobre las condiciones que garantizan la existencia del producto de convolución en una sección posterior.

Teorema 6 *El producto de convolución es una operación conmutativa. En otras palabras, si la convolución: $h = f * g$ existe entonces: $s = g * f$ también existe y además: $h = s$.*

Demostración: Considérese la expresión explícita para $h = f * g$,

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)g(s)ds \quad (4.2)$$

El cambio de variables: $u = t - s$, cuya validez está garantizada por la existencia de h , permite reescribir la integral anterior en la forma:

$$f * g = - \int_{\infty}^{-\infty} f(u)g(t-u) du \quad (4.3)$$

Manipulando esta igualdad con las reglas usuales de la integración, resulta finalmente:

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u) du = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-u)f(u)du = g * f \quad (4.4)$$

que es lo que queríamos probar. ■

4.2. Teorema de Convolución

Dedicaremos esta sección a enunciar, demostrar y comentar lo que probablemente constituye uno de los resultados más importante del análisis de señales. Este teorema, conocido como Teorema de Convolución o Faltung Theorem, establece una relación fundamental entre la transformada de Fourier de la convolución entre dos señales, y el producto de las transformadas de Fourier de las señales individuales.

Teorema 7 *La transformada de Fourier de la convolución entre dos señales satisface la identidad:*

$$F(f * g) = \sqrt{2\pi}F(f)F(g) \quad (4.5)$$

Demostración: Consideremos el producto de las transformadas de Fourier de f y g :

$$F(f)F(g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi f(\xi)e^{-i\omega\xi} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha g(\alpha)e^{-i\omega\alpha} \quad (4.6)$$

Reordenando las integrales se obtiene una expresión equivalente, a saber:

$$F(f)F(g) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} d\xi d\alpha g(\alpha)f(\xi)e^{-i\omega(\xi+\alpha)} \quad (4.7)$$

Para calcular esta última integral efectuamos el cambio de variables bidimensional (de jacobiano unidad)

$$u = \alpha + \xi \quad (4.8)$$

$$v = \alpha \quad (4.9)$$

en términos del cual la integral se reescribe en la forma:

$$F(f)F(g) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} du dv g(v)f(u-v)e^{-i\omega(u)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F(f * g) \quad (4.10)$$

de donde se deduce inmediatamente el resultado que quería probarse. ■

Puesto en los términos más sencillos, el teorema de convolución establece que¹, la transformada de Fourier convierte la convolución en el dominio temporal en un simple producto de funciones en el dominio de la frecuencia (figura 4.1)

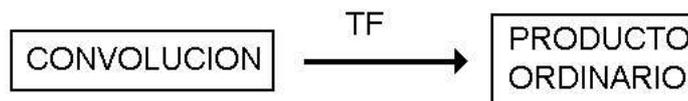


Figura 4.1: El “Faltung Theorem“ permite convertir la convolución en tiempo en un producto en el dominio de la frecuencia.

Desde el punto de vista de la representación polar de números complejos, es claro que el efecto de la convolución consiste en sumar las fases y multiplicar amplitudes de las transformadas de Fourier.

¹salvo posibles factores de normalización que podrían cambiar de acuerdo a las convenciones

4.3. Señales Causales

En general los sistemas físicos deben satisfacer la propiedad de mostrar una respuesta solamente si han sido excitados previamente (sería muy curioso que de repente sintiéramos un dolor fuerte en un pie para media hora mas tarde pincharnos con un clavo en la calle). Esta propiedad de presentar una respuesta sólo luego de haber recibido un estímulo, se denomina “causalidad”. Las señales que son idénticamente nulas antes de un cierto instante de tiempo se denominan “señales causales”; el interés en este tipo de señales es claro, las señales causales representan lo que podríamos denominar las respuestas de los sistemas físicos reales. Ahora bien, cabe preguntarse acerca de la razón de traer las funciones causales a discusión en el capítulo sobre convolución. Este será el tema que discutiremos en esta sección.

Como se adelantó en la sección anterior, es menester discutir alguna condición que asegure la existencia de la convolución entre dos funciones. Antes de entrar en tal discusión, definiremos una función (realmente una distribución) que está emparentada con la delta y que se conoce en la literatura de ingeniería con el nombre de “función Escalón Unitaria“ pero que (para honrar justamente a los autores) denominaremos función de Heaviside $H(t - \tilde{t})$. La función de Heaviside permite dar una descripción simple de la idea de causalidad y de allí su importancia en la teoría de señales.

La función escalón unitario $H(t - \tilde{t})$ está definida por medio de la siguiente igualdad:

$$H(t - \tilde{t}) \equiv \begin{cases} 0 & \text{si } t < \tilde{t} \\ 1 & \text{si } t > \tilde{t} \end{cases} \quad (4.11)$$

Evidentemente parece que $H(t - \tilde{t})$ es algo trivial y que no vale la pena ponerle un nombre. Sin embargo, observemos la siguiente función auxiliar:

$$H_\epsilon(t - \tilde{t}) \equiv \begin{cases} 0 & \text{si } t < \tilde{t} \\ \frac{1}{\epsilon} [t - (\tilde{t} - \frac{\epsilon}{2})] & \text{si } t \in (\tilde{t} - \frac{\epsilon}{2}, \tilde{t} + \frac{\epsilon}{2}) \\ 1 & \text{si } t > \tilde{t} \end{cases} \quad (4.12)$$

ciertamente $H_\epsilon(t - \tilde{t})$ tiene dos propiedades interesantes (vea el capítulo 2), a saber:

1.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} H_\epsilon(t - \tilde{t}) = H(t - \tilde{t}) \quad (4.13)$$

2. La segunda muestra una relación interesante entre nuestra nueva función auxiliar y la función $\Delta_\epsilon(t - \tilde{t})$ introducida en la sección (2.1):

$$\frac{d}{dt}H_\epsilon(t - \tilde{t}) = \Delta_\epsilon(t - \tilde{t}) \quad (4.14)$$

La consideración de estas propiedades sugiere definir a la función de Heaviside como una primitiva de la δ de Dirac². Vale la pena observar que la función de Heaviside nos permite expresar cualquier señal causal en una forma compacta; en efecto, si f es causal ($f = 0 \forall t < \tilde{t}$) podemos escribir: $f(t) = H(t - \tilde{t})g(t)$ para alguna función g .

Retomemos ahora el punto de las condiciones de existencia para la convolución; es aquí en donde encontraremos la importancia de las señales causales.

Teorema 8 *La convolución de dos señales limitadas por la izquierda (causales) integrables siempre existe, más aún, si f y g satisfacen que $f, g \equiv 0 \forall t < 0$, su producto de convolución se calcula según:*

$$f * g = \int_0^t ds f(s)g(t - s) \quad (4.15)$$

Demostración: Se deja como ejercicio fácil. (escriba las funciones limitadas por la izquierda en términos de la función escalón) ■

4.4. El Producto de Correlación

La otra operación entre señales que nos interesa en este capítulo es la correlación entre dos funciones. Esta operación también sufre de algún problema en cuanto a su existencia pero no nos ocuparemos de ello por el momento.

Definición: Dadas dos funciones de variable real y valores complejos $f(t)$ y $g(t)$, se define la convolución de f y g como una nueva función dada por la siguiente integral (en caso de que exista)

$$h(t) = \text{corr}(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t + u)g(u) du \quad (4.16)$$

Con respecto a la correlación hay varios comentarios que hacer:

²ó recíprocamente, entender a la delta como la derivada del escalón

1. Es posible que $\text{corr}(f, g)$ no exista.
2. La operación no es conmutativa ($\text{corr}(f, g) \neq \text{corr}(g, f)$) (ejercicio: ¿por qué?)
3. La **autocorrelación** de una función es simplemente $\text{corr}(f, f)$ y $\text{corr}(f, f)(0)$ no es otra cosa que la energía de la señal.
4. En cuanto al significado de la correlación, éste es básicamente estadístico pero no vamos a hacer mayor énfasis en este aspecto.

Asociado a la correlación existe un teorema análogo al teorema de Convulsión que enunciaremos a continuación.

Teorema 9 (*Teorema de Correlación*): Supongamos que las transformadas de Fourier de dos funciones $f(t)$ y $g(t)$ existen, supóngase además que $\text{corr}(f, g)$ también existe, entonces:

$$F(\text{corr}(f, g)) = F(f)(F(g))^* \quad (4.17)$$

esto es: La transformada de Fourier de la convulsión de dos funciones es igual al producto de la transformada de Fourier de la primera función por la compleja conjugada de la transformada de Fourier de la segunda.

Demostración Queda como problema ■

4.5. Problemas.

1. Calcule la convulsión entre las siguientes funciones:
 - a) $f(t) = H(t)e^{-at}$, $g(t) = H(t)e^{-bt}$; ($a, b > 0$)
 - b) $f(t) = H(t)te^{-t}$, $g(t) = H(t)e^{-t}$
 - c) $f(t) = \text{función arbitraria}$, $\delta(t - a)$
2. Encuentre la convulsión de dos gaussianas de media nula con desviaciones estándar σ_1 y σ_2 . Ayuda: hay una forma de hacerlo en una línea
3. Suponga que: $h(t) = f * g$. Calcule la derivada de h en términos de las derivadas de f y g .

Capítulo 5

Filtros ó Sistemas Lineales

Los sistemas lineales constituyen una categoría muy interesante de sistemas (físicos, biológicos, económicos, etc.) que se caracterizan por admitir el principio de superposición. Con el fin de discutir la característica más interesante de los sistemas lineales, consideremos su representación abstracta general.

Un sistema lineal se representa como una caja negra con una (o más) entrada y una (o más) salida como se muestra en la figura ??

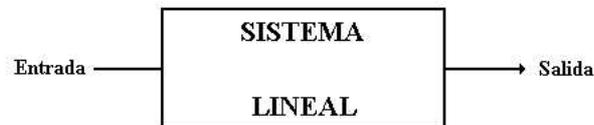


Figura 5.1: Representación esquemática de un sistema lineal

Como dijimos en nuestro primer contacto con los filtros en la sección 1.8, la característica fundamental de los sistemas lineales, el hecho de admitir el principio de superposición, consiste simplemente en que estos sistemas constituyen operadores (o filtros) que actúan sobre las entradas, es decir, la respuesta a una combinación lineal de entradas es la correspondiente combinación lineal de respuestas individuales; en términos esquemáticos:



Figura 5.2: Principio de superposición

Ejemplo 5 Con el propósito de hacer contacto con otras disciplinas, consideremos un ejemplo físico explícito: un oscilador armónico amortiguado por un roce proporcional a la velocidad de la masa y excitado por una fuerza externa....algun libro de física....

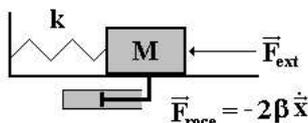


Figura 5.3: un ejemplo mecánico: el oscilador amortiguado

$$\ddot{x}(t) + 2\beta\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{F_{ext}(t)}{M} \quad (5.1)$$

Es claro que si consideramos que la “entrada” a este sistema es la fuerza excitadora ($F_{ext}(t)$), la “salida” será el movimiento real de la partícula (esto es, la solución a la ecuación diferencial: $x(t)$). Para convencernos de que este sencillo sistema físico constituye un sistema lineal, consideremos la respuesta del sistema cuando es excitado por dos fuerzas diferentes, es decir, consideremos las soluciones de las ecuaciones diferenciales:

$$\ddot{x}^{(1)} + 2\beta\dot{x}^{(1)} + \omega_0^2 x^{(1)} = \frac{F_{ext}^{(1)}}{M}, \quad y \quad (5.2)$$

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\beta\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} = \frac{F_{ext}^{(2)}}{M} \quad (5.3)$$

con condiciones iniciales homogéneas¹, no es difícil convencerse (ejercicio) de que si definimos la función

$$x_{sup}(t) = c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} \quad (5.4)$$

donde c_1 y c_2 son constantes, esta función será el movimiento de la partícula cuando se la somete a la fuerza excitadora $c_1 F_{ext}^{(1)} + c_2 F_{ext}^{(2)}$. La interpretación de este resultado es la siguiente la respuesta del sistema ante una combinación lineal de entradas es la combinación lineal de las respuestas correspondientes lo cual muestra el carácter lineal del sistema. El sistema mecánico anterior tiene un equivalente eléctrico simple, a saber: el circuito $R - L - C$ en serie.

¹ $x^{(1)}(0) = 0, \dot{x}^{(1)}(0) = 0, x^{(2)}(0) = 0, \dot{x}^{(2)}(0) = 0$

El comportamiento de muchos sistemas lineales se presentan en forma de soluciones a ecuaciones diferenciales. En el caso del oscilador forzado, si definimos:

$$L = \frac{d^2}{dt^2} + 2\beta \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \quad (5.5)$$

la ecuación dinámica del sistema se escribirá en la forma:

$$Lx(t) = \frac{F_{ext}}{M} \quad (5.6)$$

y, en consecuencia, (utilizando notación simbólica), la salida del sistema se escribirá en la forma:

$$x(t) = L^{-1} \frac{F_{ext}}{M} \quad (5.7)$$

Más adelante veremos que el caso del modelo que estamos discutiendo, el operador L^{-1} , resulta ser un operador integral (de hecho, una convolución).

5.1. Función de Transferencia

El interés en el estudio de los sistemas lineales (filtros) proviene de un hecho general de enorme interés, a saber: la respuesta de un filtro a una entrada arbitraria (f), se encuentra en términos de dos objetos

1. Un operador asociado al filtro, y
2. la entrada particular que se esté considerando. Este resultado es la formalización de la identidad (5.7) en que el movimiento de un oscilador se escribe en términos de la fuerza impulsora.

Definición 10 Consideremos un sistema lineal representado por un operador lineal L , una función de Green ($G(t)$) (función de transferencia ó respuesta al impulso) es una solución al problema:

$$LG(t) = \delta(t) \quad (5.8)$$

Teorema 10 Una solución particular al problema inhomogéneo

$$Lx(t) = f(t) \quad (5.9)$$

está dada por:

$$x(t) = G * f = \int_{\mathfrak{R}} ds G(t-s) f(s) \quad (5.10)$$

Demostración Aplicando el operador diferencial L a ambos lados de la solución propuesta se obtiene:

$$L_t x(t) = L_t \int_{\mathfrak{R}} ds G(t-s) f(s) = \int_{\mathfrak{R}} ds L_t G(t-s) f(s) \quad (5.11)$$

pero:

$$L_t G(t-s) = \delta(t-s) \quad (5.12)$$

Al sustituir este resultado en la expresión (5.11) obtenemos finalmente

$$L_t x(t) = \int_{\mathfrak{R}} ds \delta(t-s) f(s) = f(t) \quad (5.13)$$

que es lo que se quería probar. ■

El teorema anterior garantiza que si se conoce la función de Green de un filtro, la acción de dicho filtro sobre una entrada particular está dada en términos de la función de Green del filtro con la entrada. El teorema de convolución permite expresar esta relación entre entrada y salida en el dominio de la frecuencia. En efecto, en virtud del teorema anterior, la transformada de Fourier $x(\omega)$ de la solución al problema (5.9) está dada por:

$$\hat{x}(\omega) = \hat{f}(\omega) \hat{G}(\omega) \quad (5.14)$$

donde, evidentemente, $\hat{G}(\omega)$ es la transformada de Fourier de la función de Green del sistema. Aunque es evidente, es importante observar que en vista de la identidad (5.14), un filtro puede modificar tanto el espectro de fase como el espectro de amplitud de la señal de entrada.

5.2. Cálculo de G

De la discusión de la sección anterior, se concluye que el cálculo de la función de Green de un sistema lineal es fundamental para el análisis del comportamiento del sistema bajo diferentes formas de excitación externa. El problema del cálculo de la función de Green de un sistema particular puede ser bastante complicado, sin embargo, algunos de los elementos del cálculo pueden ser discutidos estudiando algún ejemplo. Con este fin regresemos al ejemplo 5 en que discutimos el oscilador forzado. Por definición, la función de Green de este sistema satisface la ecuación diferencial:

$$\ddot{G} + 2\beta\dot{G} + \omega_0^2 G = \frac{\delta(t)}{M} \quad (5.15)$$

de donde, sigue de inmediato que la función de transferencia en el dominio de la frecuencia obedece la ecuación:

$$\omega^2 \hat{G} + 2i\beta\omega \hat{G} - \omega_0^2 \hat{G} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}M} \quad (5.16)$$

y de acá podemos encontrar la siguiente expresión para la transformada de Fourier de la función de Green del sistema

$$\begin{aligned} \hat{G} &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}M \{\omega^2 + 2i\beta\omega - \omega_0^2\}} = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}M \{\omega^2 + 2i\beta\omega + \beta^2 - \beta^2 - \omega_0^2\}} = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}M \{(\omega + i\beta)^2 + \beta^2 - \omega_0^2\}} \end{aligned} \quad (5.17)$$

Este resultado nos coloca en posición de expresar (al menos formalmente) a la función de Green en la forma:

$$G(t) = \frac{1}{2\pi M} \int_{\Re} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{\{(\omega + i\beta)^2 + \beta^2 - \omega_0^2\}} \quad (5.18)$$

Lo que acabamos de hacer es una técnica usual de cálculo de funciones de Green, y es totalmente equivalente al resultado usual de los manuales para ingeniería, en que se pone:

$$\hat{G}(\omega) = \frac{\hat{x}(\omega)}{\hat{f}(\omega)} \quad (5.19)$$

donde $\hat{f}(\omega)$ y $\hat{x}(\omega)$ son las transformadas de Fourier de una señal de entrada y su salida respectiva. Vale la pena mencionar, que en la literatura el cociente que aparece en esta última fórmula se denomina usualmente “respuesta en frecuencia del filtro”.

Volviendo a la expresión (5.18) para la función de transferencia del ejemplo 5, podemos observar claramente que si consideramos a ω como una variable compleja, la expresión anterior es una función analítica con polos en $\omega = \pm\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} - i\beta$. Esta observación es importante si queremos calcular $G(t)$ en forma explícita ya que en este ejemplo (y en los casos generales) es menester recurrir a técnicas de variable compleja para poder resolver la integración. Es por esto que la estructura de las singularidades de la respuesta en frecuencia de los filtros es fundamental ya que en tales casos, la función de transferencia en el dominio del tiempo vendrá dada por

$$G(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathfrak{R}} d\omega \frac{\hat{x}(\omega)e^{i\omega t}}{\hat{f}(\omega)} \quad (5.20)$$

5.3. Problemas

1. Demuestre que dos funciones de Green difieren a lo más en la solución general al problema homogéneo $Lf(t) = 0$
- 2.

Capítulo 6

Señales discretas

En este capítulo estudiaremos con cierto detalle el proceso de discretización de una función; evidentemente, este es el pre-requisito fundamental para poder entrar en la práctica del análisis de señales discretas.

Hay dos razones fundamentales por las cuales es interesante discutir el problema del análisis de señales discretas. La primera es básicamente filosófica y consiste en el hecho de que los resultados de cualquier experimento consisten en un conjunto discreto de números (la población de un país por ejemplo, sólo puede contarse cada ciertos períodos de tiempo); la segunda razón (que no es menos importante) es de carácter práctico y consiste en que en geofísica se trabaja con enormes masas de datos grabados en forma digital y estos representan el prototipo de lo que son las señales discretas.

6.1. ¿Qué es una Señal Discreta?

Comenzaremos esta sección con un comentario bastante elemental con respecto al lenguaje usual del análisis de señales: a las funciones continuas de una variable real las denominaremos “señales analógicas”. Así, por ejemplo, la fuerza electromotriz producida por un generador de corriente alterna es una señal analógica. La intuición nos dice que una señal discreta debe ser algo así como una lista de medidas de una señal analógica efectuadas en intervalos de tiempo infinitamente cortos. Esta intuición es correcta, pero no es adecuada para una discusión del problema general del análisis de señales. En vista de esto, y en vista de que el rigor a veces es un aliado, trataremos de construir un cuadro preciso de lo que debemos entender cuando hagamos

referencia a señales discretas.

Definición 11 Sea $x(t)$ un a señal analógica. La muestra de x en $t = t_0$ es la distribución dada por:

$$x_0 := x(t)\delta(t - t_0) \quad (6.1)$$

Definición 12 Una discretización (ó digitalización) X de una señal analógica ($x(t)$) es una suma de muestras de $x(t)$

$$X = \sum_{i \in K \subseteq \mathbb{Z}} x(t_i)\delta(t - t_i) \quad (6.2)$$

Definición 13 Una discretización es regular si y solo si $\exists T$ (constante) tal que:

$$t_{i+1} - t_i = T \quad (6.3)$$

A la constante T se le denomina intervalo de discretización (o muestreo).

La manera gráfica de entender el procedimiento que hay que efectuar para lograr una discretización regular consiste en observar que la señal discreta X se obtiene a partir de la señal analógica x a través de la operación:

$$X = x(t) \sum_k \delta(t - kT) \quad (6.4)$$

Esto es: para discretizar x basta con multiplicar por un “tren“ de deltas.

6.2. El Teorema de Nyquist y su Interpretación

Es claro que el proceso de discretización tiene asociada la siguiente: ¿hasta que punto y en que sentido X es una buena representación de la señal analógica $x(t)$?

La respuesta a esta interrogante está expresada en el teorema de Nyquist que discutiremos a continuación

Teorema 11 Sea $x(t)$ una señal cuya transformada de Fourier $\hat{x}(f)$ es de banda limitada ¹ y sea f_0 la frecuencia que determina el ancho de banda de

¹Una señal $x(t)$ es de banda limitada si y solo si existe una frecuencia $f_0 > 0$ tal que $\hat{x}(f) \equiv 0$ siempre que $|f| \geq f_0$

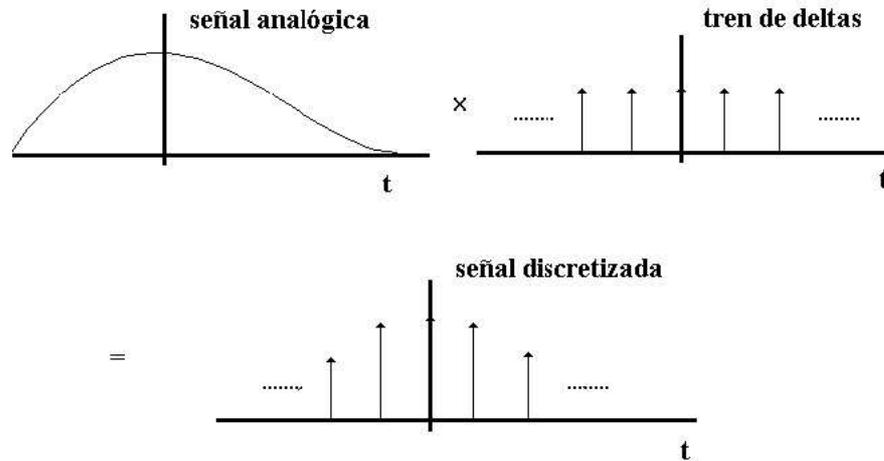


Figura 6.1: El proceso de discretización de una señal.

$\hat{x}(f)$, entonces, la discretización regular de x que reproduce adecuadamente el espectro debe tener un intervalo de muestreo dado por:

$$T = \frac{1}{2f_0} \quad (6.5)$$

El sentido en el que la discretización señalada en el teorema es “buena“, es el siguiente: únicamente con el intervalo de muestreo T es posible encontrar una reconstrucción adecuada de la transformada de Fourier $\hat{x}(f)$ de la señal original.

Para entender esto, es necesario recordar la forma en que se consigue la discretización:

$$X = x(t) \sum_k \delta(t - k) \quad (6.6)$$

Al hallar la transformada de Fourier de esta expresión encontramos trivialmente:

$$\hat{x}(f) = \hat{x}(f) * \left[\frac{1}{T} \sum_k \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \right] \quad (6.7)$$

resultado que vamos a interpretar luego del siguiente comentario. Observemos que la convolución de la delta con una función cualquiera tiene el siguiente

efecto: copiar la función centrándola en el sitio en que se encontraba la delta; en efecto:

$$H(x) = h(x) * \delta(x - x_0) = \int_{\mathfrak{R}} ds h(x - s) \delta(s - x_0) = h(x - x_0) \quad (6.8)$$

Este resultado muestra que la transformada Fourier de la discretización X se reduce a una superposición de copias de la transformada de Fourier de la señal original, como se muestra en la siguiente figura.

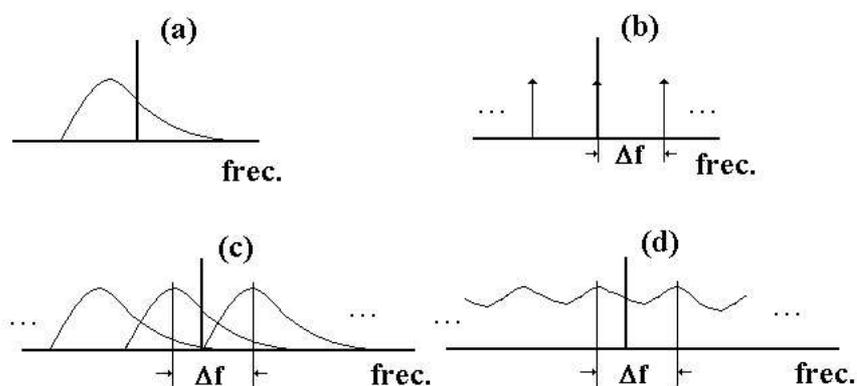


Figura 6.2: La transformada de Fourier de una señal discretizada es una función periódica y continua de la frecuencia, que se construye como una superposición de “copias“ de la transformada de Fourier original.

En virtud de este resultado, queda claro que la transformada de Fourier de una señal discreta es periódica y, más aún, que el período está dado por $2f_N$.

6.3. El Fenómeno de *ALIASING*

La sección anterior terminó con una figura muy interesante que muestra el efecto que la discretización de una señal tiene en la transformada de Fourier; si observamos la figura 6.2 podremos notar claramente que si el intervalo de discretización es demasiado corto, la superposición de señales en el espacio de la frecuencia corrompe la forma de la transformada de Fourier de la señal original. Si el muestreo se efectúa exactamente con el intervalo de Nyquist (

$1/2f_N$), la distancia entre los elementos del tren de deltas es exactamente igual a $2f_N$ y esto basta para que no haya ningún tipo de superposición entre las copias de la transformada de Fourier de la señal analógica original (x), como se observa en la figura 6.3. Al fenómeno de corrupción de la forma de la transformada de Fourier en un dominio fundamental² como consecuencia de la discretización se le conoce como “aliasing”.

Para discutir el fenómeno más a fondo, consideremos un detalle de la figura 6.2

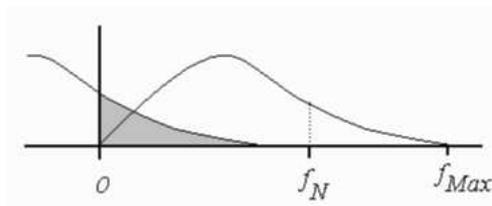


Figura 6.3: El fenómeno de aliasing visto en frecuencia

En esta figura resulta evidente que si el muestreo es incorrecto, las componentes de alta frecuencia (aquellas correspondientes a frecuencias mayores que la de Nyquist) de la señal original son “trasladadas” (superpuestas) a la zona de bajas frecuencias; en consecuencia, una señal en alias muestra componentes de baja frecuencia que están ausentes de la señal original.

Desde un punto de vista estricto, el aliasing es un fenómeno inevitable; la única forma de que no aparezca es que estemos estudiando una señal de banda limitada (de frecuencia máxima f_{Max}) y escojamos un intervalo de muestreo dado por:

$$T = \frac{1}{2f_{Max}} \quad (6.9)$$

La inevitabilidad del aliasing es particularmente molesta cuando tratamos con señales asociadas a fenómenos reales (una traza sísmica, por ejemplo), ya que en tales casos lo más probable es que desconozcamos el ancho de banda de la señal original; de esta forma tendremos que escoger el intervalo de muestreo de acuerdo a algún criterio impuesto por la fuerza. Es claro que al tomar una decisión de este tipo lo más factible es que nos equivoquemos

²Cuando se habla de funciones periódicas se dice que un dominio fundamental es un intervalo cuya longitud es igual a un período completo de la función. Así por ejemplo, para el caso que nos ocupa, podemos utilizar como dominio fundamental el intervalo: $[-f_N, f_N]$

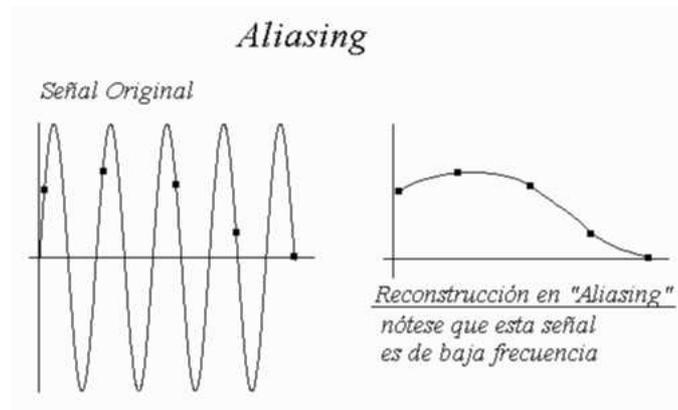


Figura 6.4: Otra manera de entender el fenómeno consiste en considerar la discretización de una señal periódica. Si el muestreo se efectúa con un intervalo mayor a medio período la señal que se reconstruya a partir de la discretización aparecerá como una señal de baja frecuencia

y que algunas componentes de alta frecuencia de la señal original entren en alias. El único (y debemos ser muy enfáticos en esto) “pseudo-remedio” a esto consiste en filtrar físicamente la señal (con un filtro pasa-bajo) antes de discretizarla, de tal forma que las componentes de alta frecuencia que no nos interesen queden eliminadas desde el principio.

A propósito de las aplicaciones de interés “casero”, resuelva el siguiente problema trivial: Considerando el límite de audición del oído humano (20000 Hz), ¿cuál debe ser la mínima tasa de muestreo de un disco compacto?, ¿por qué?

6.4. Vectores y señales discretas

Otra forma de entender la señal digital X es como un elemento de un espacio vectorial abstracto (V) de dimensión N ($= \#$ de muestras de la discretización). Es decir, en vez de imaginar la discretización en la forma:

$$X = \sum_i x(t_i) \delta(t - t_i) \quad (6.10)$$

la imaginamos como un vector fila (ó columna) en la forma usual

$$X = \begin{pmatrix} x(t_0) \\ x(t_1) \\ \vdots \\ x(t_{N-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

como veremos más adelante esta forma de pensar puede ser muy conveniente para las aplicaciones prácticas.

Capítulo 7

Convolución y Correlación de señales discretas

Hasta ahora hemos discutido algunos temas relacionados con el problema de discretización. Pasemos ahora a considerar las versiones discretas de la convolución y la correlación. La transformada de Fourier discreta será discutida en el siguiente capítulo.

7.1. Convolución Discreta

Consideremos dos señales causales¹ digitales

$$F(t) = \sum_{k=0}^{N_F} f_k \delta(t - kT) \quad (7.1)$$

$$G(t) = \sum_{p=0}^{N_G} g_p \delta(t - pT) \quad (7.2)$$

La convolución de estas señales se calcula directamente utilizando la teoría que se presentó en la sección 4.1 para la convolución para obtener:

$$C(t) \equiv F * G = \int_{\mathfrak{R}} ds \left\{ \sum_{k=0}^{N_F} f_k \delta(s - k) \sum_{p=0}^{N_G} g_p \delta(t - s - p) \right\} \quad (7.3)$$

¹recordemos que la causalidad asegura la existencia de la convolución

(donde para simplificar la notación hemos puesto: $T = 1$). Luego de integrar, la expresión anterior queda reducida a lo siguiente

$$C(t) = \sum_{\ell=0}^{N_F} \sum_{p=0}^{N_G} f_{\ell} g_p \delta(t - \ell - p). \quad (7.4)$$

Por otra parte, como F y G son señales causales, C también lo es, así que C debe poder expresarse en la forma mos poner

$$C(t) = \sum_{N=0}^{N_{\text{máx}}} c_N \delta(t - N) \quad (7.5)$$

Ahora bien, las fórmulas (7.4) y (7.5) representan la misma señal, de manera tal que el problema de el cálculo de la convolución discreta no es más que el problema de calcular la longitud de $C(t)$, es decir, el número total de coeficientes (N_{max}) en términos de las longitudes N_F y N_G , y el valor de los coeficientes c_n en términos de los coeficientes f_k y g_p . Para resolver el problema es conveniente escribir unos cuantos términos de la suma (7.4):

$$\begin{aligned} C(t) &= f_0 g_0 \delta(t) + (f_1 g_0 + f_0 g_1) \delta(t - 1) + \\ &+ (f_2 g_0 + f_1 g_1 + f_0 g_2) \delta(t - 2) + \\ &+ \cdots + \\ &+ \cdots + f_{N_F} g_{N_G} \delta(t - N_{\text{máx}}) \end{aligned} \quad (7.6)$$

o en forma compacta:

$$C(t) = \sum_{N=0}^{N_{\text{máx}}} \left\{ \sum_{l+p=N} f_l g_p \right\} \delta(t - N) \quad (7.7)$$

En cualquiera de estas expresiones es posible notar que los coeficientes de $C(t)$ se calculan como los coeficientes de un producto de polinomios² de donde se deduce inmediatamente que la longitud de la convolución está dada por $N_{\text{max}} = N_F + N_G + 2$.

La notación usual para el resultado (7.7) es la siguiente:

$$c_N = \sum_{l+p=N} f_l g_p = \sum_l f_l g_{N-l} \quad (7.8)$$

²hecho que quedará bastante claro cuando discutamos la "Transformada Z"

Comentario 1 En este punto es interesante cambiar de punto de vista y volver a la idea de representar a las señales como vectores, en efecto, no es difícil ver que el vector \mathbf{C} que corresponde a la convolución $F * X$ puede calcularse [5] [6] como:

$$\mathbf{C} = \mathbf{M}_F \mathbf{X} \quad (7.9)$$

donde, \mathbf{M}_F es una matriz cuyas columnas se construyen con las entradas de F como sigue:

$$\mathbf{M}_F \equiv \begin{pmatrix} f_0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ f_1 & f_0 & 0 & & & 0 & 0 \\ f_2 & f_1 & f_0 & & & & \\ f_3 & f_2 & f_1 & \dots & \dots & & \\ f_4 & f_3 & f_2 & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ f_{N_F} & f_{N_F-1} & & \dots & \dots & & \\ 0 & f_{N_F} & f_{N_F-1} & & & & \\ 0 & 0 & f_{N_F} & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & & & 0 & 0 \\ & & \vdots & & & f_0 & 0 \\ & & & & \vdots & \vdots & f_0 \\ & & & & f_{N_F} & f_{N_F-1} & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & f_{N_F} & f_{N_F-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & f_{N_F} \end{pmatrix}_{(N_F+N_G+2) \times N_G}$$

Ejemplo 6 Como aplicación directa del comentario anterior, supongamos que queremos efectuar la convolución $F * G$ donde F y G son señales causales de 3 muestras, en tal caso $N_F = N_G = 2$ y por lo tanto, la matriz que representa la convolución con F está dada por

$$\mathbf{M}_F \equiv \begin{pmatrix} f_0 & 0 & 0 \\ f_1 & f_0 & 0 \\ f_2 & f_1 & f_0 \\ 0 & f_2 & f_1 \\ 0 & 0 & f_2 \end{pmatrix} \quad (7.10)$$

Ejemplo 7 Si en el ejemplo anterior suponemos que G es una señal causal de 4 muestras hay que modificar la matriz como sigue

$$\mathbf{M}_F \equiv \begin{pmatrix} f_0 & 0 & 0 & 0 \\ f_1 & f_0 & 0 & 0 \\ f_2 & f_1 & f_0 & 0 \\ 0 & f_2 & f_1 & f_0 \\ 0 & 0 & f_2 & f_1 \\ 0 & 0 & 0 & f_2 \end{pmatrix} \quad (7.11)$$

7.2. Correlación Discreta

Evidentemente estamos interesados en definir adecuadamente la correlación entre dos señales discretas (F y G), para encontrar una definición en términos de una fórmula análoga a (??). Utilizaremos la definición introducida en el capítulo 4 para calcular la correlación entre las dos señales F y G en la forma:

$$C(t) \equiv \text{corr}(F, G) = \int_{\Re} ds \left\{ \sum_{k=0}^{N_F-1} f_k \delta(s-k) \sum_{p=0}^{N_G-1} g_p \delta(s+t-p) \right\} \quad (7.12)$$

de donde se sigue de inmediato:

$$C(t) = \sum_{k=0}^{N_F-1} \sum_{p=0}^{N_G-1} f_k g_p \delta(t+k-p) \quad (7.13)$$

Una vez más, esta expresión debe poder escribirse de la siguiente forma:

$$C(t) = \sum_{p=N_{Min}}^{N_{Max}} C_p \delta(t-p) \quad (7.14)$$

Como en la sección anterior, es necesario calcular los coeficientes (C_p); para ello desarrollemos la expresión (7.13) en forma explícita:

$$\begin{aligned} C(t) &= f_{N_F-1} g_0 \delta(t+N_F-1) + (f_{N_F} g_0 + f_{N_F-1} g_1) \delta(t-N_F) + \\ &\quad + \dots + \\ &\quad + (f_1 g_{N_G} + f_2 g_{N_G-1}) \delta(t-N_G-2) + f_0 g_{N_G} \delta(t-N_G-1) \end{aligned} \quad (7.15)$$

De esta expresión resulta claro que los valores mínimo y máximo del índice de suma son: $N_{Min} = -N_F + 1$ y $N_{Max} = N_G - 1$, mientras que la forma de los coeficientes (en el caso $N_F = N_G = N$) está dada por:

$$c_k = \sum_{p=0|k|+p \leq N-1} f_{|k|+p} g_p \quad (7.16)$$

Ejemplo 8 Para las dos series de tiempo X y Y dadas a continuación

$$X = (x_0, x_1, x_2) \quad y \quad Y = (y_0, y_1, y_2) \quad (7.17)$$

los coeficientes de la correlación: $C = \text{corr}(X, Y)$ son los siguientes

$$\begin{aligned} c_{-2} &= x_2 y_0 \\ c_{-1} &= x_1 y_0 + x_2 y_1 \\ c_0 &= x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 \\ c_1 &= x_0 y_1 + x_1 y_2 \\ c_2 &= x_0 y_2 \end{aligned}$$

nótese la longitud de la nueva serie de tiempo. ¿Cuáles serían los coeficientes de $\text{corr}(Y, X)$?

El índice p que aparece en la fórmula (7.16) se denomina retardo (o lag)[7]. Buscar una fórmula análoga a (7.16) para el caso general ($N_F \neq N_G$) es un problema bastante más complicado que no trataremos aquí.

Como ya habíamos mencionado en el capítulo 4 La correlación de una señal consigo misma es denominada *autocorrelación* de la señal, y el coeficiente de retardo cero de la autocorrelación de una señal (*zero lag autocorrelation coefficient*) corresponde a la energía de la señal (¿por qué?). Por cierto, la autocorrelación siempre es una señal simétrica con respecto al lag 0.

Ejemplo 9 Para la señal discreta $F = (f_0, f_1)$ la autocorrelación: $C = \text{corr}(F, F)$ está dada por

$$C = (c_{-1}, c_0, c_1) = (f_0 f_1, f_0^2 + f_1^2, f_0 f_1) \quad (7.18)$$

Ejemplo 10 En el caso de una señal causal de tres muestras $F = (f_0, f_1, f_2)$ la autocorrelación: $C = \text{corr}(F, F)$ está dada por

$$\begin{aligned} C &= (c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2) = \\ &= (f_0 f_2, f_0 f_1 + f_1 f_2, f_0^2 + f_1^2 + f_2^2, f_1 f_0 + f_1 f_2, f_0 f_2) \end{aligned} \quad (7.19)$$

En el caso en que las señales sean complejas la fórmula (7.13) debe sustituirse por:

$$C(t) = \sum_{k=0}^{N_F-1} \sum_{p=0}^{N_G-1} f_k^* g_p \delta(t+k-p) \quad (7.20)$$

lo que obliga a introducir ciertos cambios (¿cuáles?) en la fórmula (7.16).

7.3. Problemas

1. Considere las siguientes señales discretas (los subíndices indican los instantes de tiempo que corresponden a cada muestra):

$$\begin{aligned} a &= (1_{-2}, 0_{-1}, 0_0, 2_1, 2_2, 0.1_3, 0.01_4) \\ b &= (1_0, 2_1, 2_2, 0.1_3, 0.01_4) \end{aligned}$$

- a) Calcule la convolución de a y b ,
 - b) Calcule las dos correlaciones posibles ($\text{corr}(a, b)$ y $\text{corr}(b, a)$)
 - c) Encuentre la potencia de ambas señales.
2. Repita el ejercicio anterior con las dos señales $a = (a_0, a_1)$ y $b = (b_0, b_1, b_2)$
 3. Escriba un programa que calcule la convolución entre dos señales.
 4. La transformada de Hilbert³ discreta de una serie de tiempo S se define como:

$$H[S] = S * Q$$

donde el filtro (discreto) Q está dado por[8]

³este problema es relevante para el estudio de atributos sísmicos

$$Q(n) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n} & \text{si } n \neq 0 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

Use el ejercicio anterior para escribir un programa que le permita calcular la transformada de Hilbert de una señal discreta de n muestras; utilice varias longitudes diferentes del filtro F , ¿cuántos términos producen un resultado razonable?

Capítulo 8

Transformada de Fourier Discreta

Hasta el momento hemos discutido el análisis de Fourier de señales analógicas; también hemos estudiado el problema de discretización de señales y hemos comentado el sentido en que la discretización de una señal, cuyo espectro de frecuencias es de banda limitada, es una “buena aproximación” a la señal original.

En el capítulo 6 hemos aprendido que la transformada de Fourier de una función discretizada (X) es una señal periódica **continua**: $\hat{X}(f) = \hat{x}(f) * \Delta(f)$ (donde $\Delta(f)$ representa el tren de deltas) en el espacio de las frecuencias. En vista de que estamos estudiando señales discretas, es claro que nuestro interés debe centrarse en encontrar una versión discreta ($\hat{X}_d(f)$) de la transformada de Fourier de $\hat{X}(f)$. Este capítulo está dedicado a conseguir este objetivo.

8.1. Series de tiempo limitadas.

Debemos recordar que el objetivo final del proceso de discretización en los espacios de tiempo y frecuencia es obtener una representación (ciertamente incompleta) de las señales originales, apta para ser manejada con un computador. Así, desde el punto de vista del análisis computacional, debemos centrar nuestro interés no en señales discretas, sino en señales discretas limitadas en tiempo (o, como se dice en el lenguaje usual del análisis de señales, queremos observar una “ventana de datos”), ya que sólo de esta forma pode-

mos estar seguros de estar tratando con un número finito de muestras (dicho en otra forma: sólo así podemos estar seguros que los datos que queremos estudiar ocupan un espacio finito de la memoria de un computador). Esta observación lleva de forma natural a definir las series de tiempo limitadas.

Definición 14 Sean X la discretización de una señal analógica ($x(t)$), T el intervalo de muestreo que ha generado a X y T_0 un intervalo de tiempo; la serie de tiempo limitada X_{Lim} asociada a X en el intervalo: $I = (-T/2, T_0 - T/2)$ está dada por el producto:

$$X_{Lim} = XI(t) \quad (8.1)$$

donde, $I(t)$ es la “función indicadora“ del intervalo I definida por:

$$I(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in (-T/2, T_0 - T/2) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (8.2)$$

Evidentemente:

$$X_{Lim}(t) = \begin{cases} X(t) & \text{si } t \in I \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (8.3)$$

o, puesto en palabras, la serie de tiempo limitada no es otra cosa que una versión cortada de la serie de tiempo original que solo contiene aquellas muestras que corresponden a instantes de tiempo que están en el interior del intervalo de interés (ventana). Al cortar la serie de tiempo a una ventana aparecen ciertos efectos en frecuencia que estudiaremos en la siguiente sección.

8.2. Efecto de la Truncación.

Consideremos el cálculo de la transformada de Fourier de una serie de tiempo limitada ($\hat{X}_{Lim}(f) \equiv F[X_{Lim}(t)]$); en vista del teorema de convolución, es claro que:

$$\hat{X}_{Lim}(f) = F[X_{Lim}(t)] * F[I(t)] \quad (8.4)$$

Esta ecuación nos dice que, debido a la presencia de la función indicadora $I(t)$, la transformada de Fourier de la señal limitada es distinta a la transformada de Fourier de la serie de tiempo original; de hecho, la truncación en

tiempo tiene el efecto (en frecuencia) de cambiar la transformada de Fourier de la función discreta original filtrándola con la siguiente función de transferencia (**ejercicio**):

$$F [I(f)] = sinc(f) = \frac{\text{sen}(2\pi f T_0)}{2\pi f T_0} \quad (8.5)$$

La convolución con la función $sinc(f)$ se evidencia en la aparición de un ruido (no aditivo) de alta frecuencia que modifica la forma de $\hat{X}(f)$ y que se denomina “riple”.

Es fundamental que entendamos que el “riple” es un efecto que está unido inexorablemente a la necesidad de truncar la señal a una ventana de tiempo finita (esto es, a la presencia de $I(t)$); la única forma de atenuar dicho efecto consiste en aumentar el tamaño de la ventana (T_0) y resulta evidente que esto tiene un precio en memoria y tiempo de computador.

En este punto es bueno que recordemos que la función $\hat{X}_{Lim}(f)$ es una función *continua* y periódica de período $\frac{2\pi}{T}$. Evidentemente esto no es suficiente para nuestro objetivo de obtener una versión de $\hat{X}_{Lim}(f)$ que podamos manipular con un computador, ya que para alcanzar tal objetivo necesitamos construir una versión discreta (que denotaremos por $\hat{X}_{Lim}^{(D)}(f)$) de $\hat{X}_{Lim}(f)$.

Antes de construir tal versión discreta de $\hat{X}_{Lim}(f)$ observemos que en vista de que nuestra señal original está limitada en *tiempo*, el intervalo de muestreo en frecuencia deberá ser $\frac{2\pi}{T_0}$

8.3. Definición Precisa de la DFT

En esta sección construiremos una “definición” para la transformada de Fourier discreta. Como ya hemos hecho en otros capítulos, la “definición” aparecerá naturalmente a través del uso directo de las definiciones que hemos introducido para los casos no discretos.

Consideremos el problema de discretización de $\hat{X}_{Lim}(f)$; ciertamente (use la definición) el valor de la n -ésima muestra de $\hat{X}_{Lim}^{(D)}(f)$ está dado por:

$$\hat{X}_{Lim}^{(D)}\left(\frac{n}{T_0}\right) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} dt X_{Lim}(t) e^{-2\pi i f t} \right] \Big|_{f=\frac{n}{T_0}} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} dt X(t) I(t) e^{-2\pi i f t} \right] \Big|_{f=\frac{n}{T_0}} \quad (8.6)$$

O usando la forma explícita de la serie de tiempo discreta $X(t)$:

$$\hat{X}_{Lim}^{(D)}\left(\frac{n}{T_0}\right) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} dt \left(x(t) \sum_k \delta(t - kT) \right) I(t) e^{-2\pi i f t} \right] \Big|_{f=\frac{n}{T_0}} \quad (8.7)$$

Evaluando los productos $x(t) \delta(t - kT)$, intercambiando el orden de suma e integración y evaluando la frecuencia en $f = n/T_0$ obtenemos:

$$\hat{X}_{Lim}^{(D)}\left(\frac{n}{T_0}\right) = \sum_k x(kT) \int_I dt \delta(t - kT) e^{-2\pi i \frac{n}{T_0} t} \quad (8.8)$$

Definiendo:

$$\mathcal{I}(k) = \int_I dt \delta(t - kT) e^{-2\pi i \frac{n}{T_0} t} \quad (8.9)$$

podemos reescribir la siguiente expresión simplificada¹ para $\hat{X}_{Lim}^{(D)}(n/T_0)$

$$\hat{X}_{Lim}^{(D)}\left(\frac{n}{T_0}\right) = \sum_k x(kT) \mathcal{I}(k) \quad (8.10)$$

recordando que los valores de $x(t)$ en los puntos de muestreo son las entradas de la discretización de $x(t)$ ($x(kT) = X(kT)$) podemos reescribir la expresión que acabamos de obtener en la forma

$$\hat{X}_{Lim}^{(D)}\left(\frac{n}{T_0}\right) = \sum_{kT \in I} X(kT) e^{-2\pi i \frac{nkT}{T_0}} \quad (8.11)$$

Para calcular explícitamente el valor de la suma (8.11) necesitamos el número de sumandos y para calcular esto, basta con observar que el número:

$$N = \text{Int}\left(\frac{T_0}{T}\right) - 1 \quad (8.12)$$

es el número de muestras de X que “cabén” en el intervalo (o ventana) $(-T/2, T_0 - T/2)$; en otras palabras, $N - 1$ corresponde al índice de la última muestra de la serie de datos ($X_{Lim}(t)$). En definitiva, hemos encontrado que la n -ésima muestra de la transformada de Fourier discreta (DFT) de una serie de N datos debe calcularse según:

¹Obsérvese (ejercicio) que: $\mathcal{I}(k) = \begin{cases} e^{-2\pi i \frac{nkT}{T_0}} & \text{si } kT \in I \\ 0 & \text{si } kT \notin I \end{cases}$

$$\hat{X}_{Lim}^{(D)}\left(\frac{n}{T_0}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} X(kT) e^{-2\pi i \frac{nk}{N}} \quad (8.13)$$

Para llegar a esta expresión para la DFT hemos utilizado todo el desarrollo de los capítulos anteriores, sin embargo, y desde un punto de vista práctico podemos tomar esta fórmula como definición. De esta forma, el punto de partida de la discusión acerca de la DFT es el siguiente:

Definición 15 Dada una serie de tiempo de N muestras ($X(kT)$, $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$) tomadas con un intervalo de muestreo T , se define su transformada de Fourier discreta (DFT) como una señal discreta de N muestras en el dominio de la frecuencia ($\hat{X}(kf)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$) registrada con un intervalo de muestreo $f = \frac{1}{NT}$ y que se calcula a través de la operación :

$$\hat{X}(kf) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2\pi i \frac{kn}{N}} X(nT) \quad (8.14)$$

Es posible expresar la fórmula (8.14) de manera menos aparatosa, para ello basta con introducir el número complejo

$$W \equiv e^{-\frac{2\pi i}{N}} \quad (8.15)$$

en términos del cual, la definición de la transformada de Fourier discreta queda como

$$\hat{X}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} W^{nk} x(k), \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (8.16)$$

En este punto vale la pena hacer una observación sencilla cuya importancia se hará evidente en el capítulo 11. Las potencias del número complejo W que aparecen en la fórmula (8.16) satisfacen la igualdad:

$$W^{nk} = W^{nk \bmod N} \quad (8.17)$$

Donde, $nk \bmod N$ es el producto de n por k “módulo” N , cuyo resultado es igual al resto de la división² de nk entre N . Como ya comentamos, esta

²Por ejemplo, $3 \times 2, \bmod(4) = 2$

observación es sencilla y sigue del hecho, bien conocido, de que desde el punto de vista de los complejos el producto por W representa una rotación de ángulo $\frac{2\pi}{N}$ y por lo tanto sus potencias enteras representan rotaciones iteradas que evidentemente son cíclicas.

Si recordamos la interpretación vectorial de las series de tiempo es posible reexpresar la transformada de Fourier discreta en forma matricial. En efecto, definiendo una matriz \mathbf{M} cuyos elementos están dados en términos de potencias de W según:

$$[\mathbf{M}]_{kn} = W^{kn} \quad (8.18)$$

La operación (8.5) adopta la forma:

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{M}\mathbf{X} \quad (8.19)$$

donde \mathbf{X} y $\hat{\mathbf{X}}$ son los vectores que representan a la señal en los dominios de tiempo y frecuencia respectivamente.

Ejemplo 11 Con el fin de fijar y aclarar las ideas consideremos el caso especial de $N = 4$ muestras. En tal caso la matriz de transformación está dada por:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^1 & W^2 & W^3 \\ 1 & W^2 & 1 & W^2 \\ 1 & W^3 & W^2 & W^1 \end{pmatrix} \quad (8.20)$$

Donde hemos utilizado las propiedades de W para sustituir: $W^4 = 1$, $W^6 = W^2$ y $W^9 = W^5 = W$

8.4. La Inversibilidad de la Transformada de Fourier Discreta

La definición de la DFT que hemos introducido proviene de la transformada de Fourier de funciones continuas; es claro que la fórmula de transformación para señales discretas debe ser inversible. Desde el punto de vista de la representación matricial el requerimiento de inversibilidad de la DFT coincide con el requerimiento de la no singularidad de \mathbf{M} . A continuación probaremos que la matriz de transformación es inversible.

Teorema 12 *La fórmula de inversión de Fourier discreta es la siguiente:*

$$X(nT) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i \frac{np}{N}} \hat{X}_d\left(\frac{p}{NT}\right) \quad (8.21)$$

Demostración: Para probar el teorema basta con demostrar que la matriz \mathbf{A} , cuyos elementos están dados por:

$$[\mathbf{A}]_{kn} = \frac{1}{N} e^{2\pi i \frac{kn}{N}} \quad (8.22)$$

es la inversa de \mathbf{M} . Para probar esta afirmación observemos que un elemento cualquiera del producto \mathbf{AM} se escribe en la forma:

$$[\mathbf{AM}]_{kn} = \frac{1}{N} \sum_p e^{-2\pi i \frac{kp}{N}} e^{2\pi i \frac{pn}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} e^{-2\pi i \frac{p(n-k)}{N}} \quad (8.23)$$

ahora bien, si $n = k$ la sumatoria es igual a N (suma N veces el 1); por otra parte, si $n \neq k$ la sumatoria corresponde a la suma de los $N - 1$ primeros términos de una progresión geométrica de razón ³:

$$r = e^{-2\pi i \frac{(n-k)}{N}} \quad (8.24)$$

lo que arroja el resultado

$$\sum_{p=0}^{N-1} e^{2\pi i \frac{(n-k)p}{N}} = \frac{e^{2\pi i (n-k)} - 1}{e^{2\pi i \frac{(n-k)}{N}} - 1} \quad (8.25)$$

que para $n \neq k$ es idénticamente nulo.

En definitiva, hemos obtenido $[\mathbf{AM}]_{kn} = \delta_{kn}$, lo que constituye la prueba de la afirmación inicial con respecto a la inversibilidad de \mathbf{M} .

8.5. Periodicidad y Dominio Fundamental

³ $1 + r + r^2 + \dots + r^{N-1} = \frac{r^N - 1}{r - 1}$

Capítulo 9

Transformada Z

Gran parte de la literatura de análisis de señales discretas comienza introduciendo directamente a la transformada \mathcal{Z} como objeto natural. Este punto de vista no corresponde con el punto de vista que se ha utilizado a lo largo de este curso en que hasta este momento hemos utilizado la distribución δ de Dirac para enfatizar la conexión entre señales continuas y discretas. En este capítulo vamos a tomar enfoque “clásico” e introduciremos directamente la transformada \mathcal{Z} , para luego establecer la conexión con el análisis de Fourier.

9.1. La Transformada \mathcal{Z} y su Relación con la Transformada de Fourier Discreta

Definición 16 *Dada una serie de tiempo*

$$\sum_p x_p \delta(t - p) \quad (9.1)$$

se define su transformada \mathcal{Z} como una función de la variable compleja z definida por:

$$\mathcal{Z}[X] \equiv X(z) = \sum_p x_p z^p \quad (9.2)$$

Con el fin de establecer bien esta noción comentemos un par de ejemplos. Una la señal acausal con muestras en $t = -1$, $t = 0$ y $t = 2$ tendría una transformada \mathcal{Z} de la forma

$$\mathcal{Z}[X] = \frac{x_{-1}}{z} + x_0 + x_1 z$$

mientras que una señal causal de longitud finita N_{max} tendría una transformada \mathcal{Z} dada por un polinomio de grado N_{max} . En casos más generales la transformada \mathcal{Z} puede tener una estructura de singularidades no trivial pero ciertamente, el residuo será siempre el valor de la muestra en $t = -1$.

Para entender el significado de la transformada \mathcal{Z} de una serie de tiempo, calculemos la transformada de Fourier de una señal discreta arbitraria X . Por definición:

$$\begin{aligned}\hat{X}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} \sum_p x_p \delta(t - p) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_p x_p e^{-i\omega p}\end{aligned}\quad (9.3)$$

Poniendo: $z = e^{-i\omega}$ resulta evidente que

$$\hat{X}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{Z}[X]|_{z=e^{-i\omega}} \quad (9.4)$$

Dicho en otros términos, si queremos calcular la transformada de Fourier de una señal discreta basta con escribir su transformada \mathcal{Z} , sustituir $z = e^{-i\omega}$ e incluir el factor de normalización $1/\sqrt{2\pi}$. Evidentemente esta relación solo es de interés si la señal tiene un ancho de banda temporal limitado, para ver las cosas en acción, consideremos el caso particular de una señal causal con $N = 3$ muestras, en tal caso

$$\mathcal{Z}[X] = X(z) = x_0 + x_1 z + x_2 z^2 \quad (9.5)$$

Al evaluar esta función en el valor particular $z = e^{2\pi i \frac{n}{3}}$, $n = 0, 1, 2$ resulta un conjunto de tres valores posibles¹:

$$D_n = X(z)|_{z=e^{2\pi i \frac{n}{3}}} = x_0 + x_1 e^{2\pi i \frac{n}{3}} + x_2 e^{2\pi i \frac{2n}{3}} \quad (9.6)$$

Estos tres valores D_0 , D_1 y D_2 corresponden exactamente con los elementos (muestras) de la transformada de Fourier discreta (símbolo para la DFT) de X .

¹recordemos que las únicas frecuencias posibles para este caso son: 0 , $2\pi/3$ y $2 \times 2\pi/3$

9.2. Relación con la Convolución y Correlación Discretas

La transformada \mathcal{Z} provee de un mecanismo simplísimo para el cálculo de la convolución de señales discretas. En efecto, consideremos dos señales discretas X e Y y sus respectivas transformadas $\mathcal{Z} X(z)$, $Y(z)$, la inspección directa muestra que el resultado del producto (entendido en términos del producto de dos sumas de potencias de z):

$$C(z) = X(z)Y(z) \quad (9.7)$$

Da como resultado una nueva función de $C(z)$ que corresponde a la transformada \mathcal{Z} del producto de convolución de las señales discretas X e Y . En otras palabras, en términos de la transformada \mathcal{Z} el teorema de convolución discreto adopta la forma:

$$\mathcal{Z}[X * Y] = X(z)Y(z) \quad (9.8)$$

Análogamente, (**ejercicio**) el teorema de correlación se expresa en la fórmula:

$$\mathcal{Z}[\text{corr}(X, Y)] = X^*\left(\frac{1}{z}\right)Y(z) \quad (9.9)$$

donde como siempre, el asterisco denota conjugación compleja (en caso de que la señal X tenga coeficientes complejos)

Ejemplo 12 *A propósito del teorema de correlación, retomemos los ejemplos 9 y 10 del capítulo 7, en que se calculaba la autocorrelación de dos señales, de dos y tres muestras, a saber:*

$$F^{(1)} = (f_0, f_1) \quad y \quad (9.10)$$

$$F^{(2)} = (f_0, f_1, f_2). \quad (9.11)$$

Al utilizar la transformada \mathcal{Z} ambos cálculos se convierten en un ejercicio de secundaria. En efecto, las transformadas de ambas señales son

$$\mathcal{Z}[F^{(1)}] = f_0 + f_1 z \quad (9.12)$$

$$\mathcal{Z}[F^{(2)}] = f_0 + f_1 z + f_2 z^2 \quad (9.13)$$

de manera que al evaluar en $1/z$ se obtiene:

$$\mathcal{Z}[F^{(1)}]_{1/z} = \frac{f_1}{z} + f_0 \quad (9.14)$$

$$\mathcal{Z}[F^{(2)}]_z = \frac{f_2}{z^2} + \frac{f_1}{z} + f_0 \quad (9.15)$$

con lo cual el cálculo de la autocorrelación a quedado reducido a leer los coeficientes de los productos

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[\text{corr}(F^{(1)}, F^{(1)})] &= \left(\frac{f_1}{z} + f_0\right)(f_0 + f_1 z) = \\ &= \frac{f_0 f_1}{z} + f_0^2 + f_1^2 + f_0 f_1 z \end{aligned} \quad (9.16)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[\text{corr}(F^{(2)}, F^{(1)})] &= \left(\frac{f_2}{z^2} + \frac{f_1}{z} + f_0\right)\left(\frac{f_2}{z^2} + \frac{f_1}{z} + f_0\right) = \\ &= \frac{f_0 f_2}{z^2} + \frac{f_0 f_1 + f_1 f_2}{z} + f_0^2 + f_1^2 + f_2^2 + \\ &+ (f_1 f_0 + f_1 f_2)z + f_0 f_2 z^2 \end{aligned} \quad (9.17)$$

9.3. Problemas

1. Demuestre que el "Filtro" $Y(z) = z$ corresponde a un filtro que adelanta en una muestra de tiempo.
2. Use el resultado anterior para demostrar que el filtro $D(z) = z - 1$ es el operador de derivación discreta.
3. Muestre explícitamente que el filtro derivador aniquila frecuencias nulas.
4. Considere las series de tiempo causales (las primeras muestras corresponden con $t = 0$)

$$X = (1, 0, 0, 2, 0, 1), \text{quady } Y = (1, 2, 3) \quad (9.18)$$

- a) ¿Cuáles son las transformadas \mathcal{Z} asociadas?
- b) use los resultados de este capítulo para calcular la convolución de ambas señales.
- c) Calcule la correlación de ambas señales.

Capítulo 10

Deconvolución

En el capítulo 5 aprendimos que la relación *salida/entrada* de un filtro está dada por $s = G*e$ donde ($e(t)$ y $s(t)$) son las señales de entrada y salida y $G(t)$ la función de transferencia del filtro. En muchas aplicaciones prácticas es posible conocer (medir) s y e y se plantea el problema de encontrar la función de transferencia del filtro. Este problema conocido como problema de *deconvolución* es el objeto de estudio de este capítulo.

10.1. El Caso Continuo

En el dominio de la frecuencia la relación salida/entrada de un filtro adopta la forma

$$\hat{s}(\omega) = \hat{G}(\omega)\hat{e}(\omega) \quad (10.1)$$

De esta forma resulta “obvio” que la solución al problema de deconvolución, es decir, la función de Green del sistema, es la siguiente:

$$G(t) = F^{-1} \left[\frac{\hat{s}(\omega)}{\hat{e}(\omega)} \right] \quad (10.2)$$

Desafortunadamente, esto solo es una solución formal, y en la práctica el cálculo presenta al menos dos problemas graves.

1. El problema más evidente que ya fué comentado en el capítulo 5 tiene que ver con la inversión de Fourier. Que depende de la estructura del conjunto de singularidades del cociente $\hat{G}(\omega) = \hat{s}(\omega)/\hat{e}(\omega)$ en el plano complejo.

2. El otro problema está relacionado con el hecho de que estamos hablando de señales que queremos medir. Esto es, estamos hablando de experimentos que incluyen medidas que tienen algún error.

En todo caso, si olvidamos el primer problema (pensando que siempre podremos resolver las integrales) el problema del ruido debe ser enfrentado directamente, y para ello es necesario introducir algún modelo para describir una señal ruidosa. El modelo más simple que se utiliza para describir una señal con ruido de forma “realista” consiste en asumir que la señal ruidosa ($r(t)$) es la suma de la señal limpia y una función $n(t)$ que usualmente se denomina “ruido aditivo”, es decir,

$$s_r(t) = G(t) * e(t) + n(t) = s(t) + n(t) \quad (10.3)$$

En vista de que esta expresión es lineal, su expresión en frecuencia tiene la forma:

$$\hat{s}_r(\omega) = \hat{G}(\omega)\hat{e}(\omega) + \hat{n}(\omega) \quad (10.4)$$

Para el problema de deconvolución se considera que la data está constituida por la señal ruidosa y la entrada a partir de las cuales se va a calcular la función de transferencia. El nuevo problema sigue siendo complejo, pero afortunadamente existe un método propuesto por N. Wiener que permite encontrar una aproximación a la función de Green.

El enfoque “óptimo” de Wiener consiste en buscar un filtro $\phi(t)$ (o su correspondiente transformada de Fourier $\hat{\phi}(\omega)$) de tal forma que al aplicar el filtro a la señal ruidosa se obtenga una “buena aproximación” ($G_\phi(t)$) a la función de Green “limpia” $G(t)$. Acá el sentido de la frase “buena aproximación” es en términos de mínimos cuadrados, esto es, el filtro óptimo es la solución al problema de minimización de la siguiente “funcional” (función de función):

$$J[\phi] = \int_{\Re} |G_\phi(t) - G(t)|^2 dt \quad (10.5)$$

ó en la representación en frecuencia

$$J[\phi] = \int_{\Re\phi} \left| \hat{G}_\phi(\omega) - \hat{G}(\omega) \right|^2 d\omega \quad (10.6)$$

De acuerdo al enfoque de Wiener, se propone la siguiente función de transferencia aproximada

$$\hat{G}_\phi(\omega) = \frac{\hat{\phi}(\omega)\hat{s}_r(\omega)}{\hat{e}(\omega)} \quad (10.7)$$

que al ser sustituida en J lleva a

$$\begin{aligned} J[\phi] &= \int_{\Re} \left| \frac{[\hat{s}(\omega) + \hat{n}(\omega)]\hat{\phi}(\omega)}{\hat{e}(\omega)} - \frac{\hat{s}(\omega)}{\hat{e}(\omega)} \right|^2 d\omega \\ &= \int_{\Re} |\hat{e}|^{-2} \left\{ |\hat{s}|^2 |1 - \hat{\phi}|^2 + |\hat{n}|^2 |\hat{\phi}|^2 \right\} d\omega \end{aligned} \quad (10.8)$$

Para optimizar esta expresión basta con encontrar el punto crítico de J , es decir, “diferenciar“ con J respecto a ϕ , igualar a cero y encontrar la solución a la ecuación $\frac{dj}{d\phi} = 0$. Al llevar este procedimiento a término, resulta que el filtro óptimo está dado por:

$$\hat{\phi}(\omega) = \frac{|\hat{s}(\omega)|^2}{|\hat{s}(\omega)|^2 + |\hat{n}(\omega)|^2} \quad (10.9)$$

10.2. El Caso Discreto

10.2.1. Presentación del Problema

Es interesante rediscutir todo el problema de deconvolución en el marco de las señales discretas. Para ello es interesante utilizar la representación de la señal en términos de la transformada Z . En efecto, sabemos que en ausencia de ruido y en virtud del teorema de convolución, la transformada Z de la salida de un filtro se escribe en la forma:

$$Z[V] = Z[G]Z[e] \quad (10.10)$$

De esta manera, la transformada Z de la función de transferencia del sistema tendrá la estructura:

$$Z[G] = \frac{Z[V]}{Z[U]} \quad (10.11)$$

Una vez más estamos “dividiendo”, y esto introduce problemas asociados a las singularidades.

10.2.2. Filtros Inversos

Con el fin de familiarizarnos más con el problema de las singularidades discutamos un problema particular: el cálculo del filtro “inverso” de un sistema, esto es tratemos de encontrar cuál es el filtro cuya convolución con una entrada dada produce la señal¹ $S = (1, 0, 0, \dots)$ ².

Ciertamente, en la representación de transformada Z , la solución al problema es:

$$Z^{-1}[U] = \frac{1}{Z[U]} \quad (10.12)$$

donde $1/Z[U]$ es el polinomio inverso a $Z[u]$.

Para ser más explícitos, consideremos el caso del filtro diferenciador (D) cuya representación en transformada Z es la siguiente:

$$Z[D] = z - 1 \quad (10.13)$$

Ciertamente, el filtro inverso del diferenciador es el filtro integrador (del que ya hemos discutido que es problemático por poseer una singularidad para frecuencia 0). El cálculo explícito del filtro inverso resulta en

$$Z[I] = \frac{1}{z - 1} = -\frac{1}{1 - z} = -(1 + z + z^2 + z^3 + \dots) \quad (10.14)$$

Ejercicio 6 Verifique que $Z[D]Z[I] = 1$.

Ahora bien, es evidente que el problema de la singularidad está presente ($z = 1$) es un polo de $Z[I]$, y cabe preguntarse lo siguiente: ¿en que se manifiesta la singularidad?

Una forma de responder consiste en observar la serie de tiempo asociada al filtro integrador:

$$I = (1, 1, 1, 1, \dots) \quad (10.15)$$

¹siguiendo la notación que hemos introducido, primera muestra es en $t = 0$

²Observemos que la señal $(1, 0, 0, 0, \dots)$ es el elemento unidad de la convolución discreta. Por esto, si $A(z)$ y $B(z)$ satisfacen: $A(z)B(z) = 1$ se dice que son “inversos” entre sí.

Al calcular la potencia del filtro (recordemos que la potencia es la autocorrelación de la señal) resulta

$$\text{Potencia} = \text{Corr}(I, I) = 1 + 1 + 1 + 1 + \dots = \infty!!! \quad (10.16)$$

que es un fenómeno inesperado, por cierto que a filtro con estas características (energía infinita) se denomina *inestable*.

Una solución parcial al problema de la inestabilidad se consigue si en lugar del filtro integrador “exacto” utilizamos un filtro “integrador aproximado” [6]. Para ello comencemos por introducir un parámetro auxiliar real $0 < \rho < 1$ y un filtro dependiente de ρ dado por la formula:

$$f(\rho, z) = -\frac{1}{1 - \rho z} = -(1 + \rho z + \rho^2 z^2 + \rho^3 z^3 + \dots) \quad (10.17)$$

Ciertamente este filtro es estable en el sentido de que la potencia de la señal discreta de tiempo asociada a la serie de potencias de z es finita, en efecto, para todo $\rho < 1$ la potencia está dada por

$$\text{Potencia} = 1 + \rho^2 + \rho^4 + \dots + \rho^{2k} \dots = \sum_{p=0}^{\infty} \rho^{2k} = \frac{1}{1 - \rho^2} < \infty \quad (10.18)$$

Ahora bien, es claro que $f(\rho = 1, z) = Z[I]$ esto es, el filtro integrador se obtiene a partir del filtro paramétrico f simplemente evaluando la variable auxiliar ρ en el valor límite $\rho = 1$ para el cual la potencia de f se hace divergente. Ciertamente f debe tener algún significado, la pregunta es: ¿cual será?. Para responder a esto volvamos al filtro integrador

$$Z[I] = -\frac{1}{1 - z}$$

y recordemos la naturaleza de la singularidad que se presenta para $z = 1$, sustituyendo el valor: $z = e^{i\omega}$ resulta evidente una vez más que la singularidad del filtro integrador ocurre para frecuencia 0, como veremos a continuación, esto da una clave para entender el significado de ρ .

Concentremos de nuevo en el filtro f e introduzcamos los siguientes números complejos: $s = \varpi - i \log(\rho)$ y $\varsigma = e^{is} (= e^{\log(\rho)} e^{i\varpi} = \rho z)$ en términos de los cuales, el filtro f se puede reescribir en la forma:

$$f(\rho, z) = g(\varsigma) = -\frac{1}{1 - \varsigma}$$

es obvio que mientras se cumpla la condición $\rho < 1$ el modulo del numero complejo ς sera siempre menor que 1 y claro, en ese dominio (el interior del circulo unitario) $g(\varsigma)$ no tiene singularidades, de esta forma, s está actuando como una frecuencia compleja cuya parte imaginaria $\log(\rho)$ garantiza la estabilidad del filtro f ya que la singularidad en $\varpi = 0$ ha desaparecido, esto ha ocurrido a expensas de amortiguar (en el tiempo) a cualquier senal sobre el que se aplique (recordemos que para pasar al tiempo discreto solo hay que sustituir $z \rightarrow z^t$ donde t representa el instante en que se toma la muestra). Mas aun, cuando $\rho \rightarrow 1$ (límite de no amortiguamiento) recuperamos el filtro integrador, el filtro f es el integrador "aproximado", y puede utilizarse con cierta propiedad, sin embargo, aun presenta un problema importante: el filtro tiene demasiados términos (de hecho, ∞ terminos) y esto hace que este filtro sea inútil en las aplicaciones, evidentemente podríamos pensar en cortar en algún punto asociado a alguna potencia de ρ , lo que nos daría algún control sobre el error en ρ pero no demasiado acerca del valor de f como filtro inverso.

10.2.3. Mínimos Cuadrados

Una solución práctica al problema de deconvolución que nos permite tener control sobre la longitud y calidad del filtro inverso consiste en seguir de cerca la propuesta de Wiener, es decir, utilizar el método de mínimos cuadrados.

Comenzaremos recordar que el objetivo de la deconvolución por el método de mínimos cuadrados consiste en construir una solución *aproximada* al problema:

$$G * E = S \quad (10.19)$$

donde E y S (la entrada y salida de un sistema) son filtros conocidos. Al igual que en la sección 10.5 la solución de mínimos cuadrados consiste en encontrar un filtro G_{approx} que minimice el error cuadrático promedio entre la convolución de la señal de entrada con el filtro aproximado y la respuesta del sistema, de acuerdo con esto, el filtro aproximado se consigue como sigue,

Definición 17 Dadas dos señales discretas E y S relacionadas por $S = G * S$, el filtro aproximado por mínimos cuadrados G_{approx} está dado por el filtro que minimiza la función objetivo (ó función de costo):

$$J[G] = \|G * E - S\|^2 \quad (10.20)$$

Para resolver este problema de optimización es interesante recordar que la convolución admite una representación matricial, en la cual el filtro $G * E$ está representado por el vector columna que se obtiene de multiplicar al vector (\mathbf{G}) que representa a la señal G por la matriz \mathbf{E} .

De esta forma, y usando la notación matricial, el filtro aproximado es el vector que optimiza a la forma cuadrática:

$$\begin{aligned} J[\mathbf{G}] &= \|\mathbf{E}\mathbf{G} - \mathbf{B}\|^2 = (\mathbf{G}\mathbf{I} - \mathbf{B})^T (\mathbf{G}\mathbf{I} - \mathbf{B}) \\ &= \mathbf{G}^T \mathbf{E}^T \mathbf{E} \mathbf{G} - \mathbf{G}^T \mathbf{E}^T \mathbf{S} - \mathbf{S}^T \mathbf{E} \mathbf{G} + \mathbf{S}^T \mathbf{S} \end{aligned} \quad (10.21)$$

donde \mathbf{A}^T indica el traspuesto de \mathbf{A} . Ciertamente, los extremos de J se encuentran en sus puntos críticos, así que, para encontrar el filtro óptimo G_{op} basta con anular el gradiente de J con respecto a \mathbf{G}^T (o \mathbf{G}), igualar a cero y resolver el sistema de ecuaciones resultantes. Al efectuar estas operaciones se obtiene:

$$\nabla_{\mathbf{G}^T} J = \mathbf{E}^T \mathbf{E} \mathbf{G} - \mathbf{E}^T \mathbf{S} = \mathbf{0} \quad (10.22)$$

de donde resulta que el valor óptimo (es decir, el filtro aproximado) está dado por

$$\mathbf{G}_{op} = \mathbf{G}_{aprox} = (\mathbf{E}^T \mathbf{E})^{-1} \mathbf{E}^T \mathbf{S} \quad (10.23)$$

Ejemplo 13 Para fijar estas ideas vamos a considerar un ejemplo tomado directamente de la referencia [6]. El problema consiste en encontrar un filtro de dos muestras ($f = (f_0, f_1)$) que transforme la señal

$$E = (\dots, 0, 0, 2, 1, 0, 0, \dots) \quad (10.24)$$

en un pulso unitario (spike): $S = (1, 0, 0)$.

Al efectuar la convolución de la señal de entrada con el filtro ($f * E$) resulta:

$$E_f = f * E = (2f_0, f_0 + 2f_1, f_1) \quad (10.25)$$

resultado que en términos matriciales se representa en la forma:

$$\mathbf{E}_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} \quad (10.26)$$

y el problema de la construcción del filtro aproximado se reduce a minimizar la función objetivo:

$$J(f_0, f_1) = \|S - \mathbf{E}f\|^2 \quad (10.27)$$

al utilizar la solución estándar:

$$\mathbf{G}_{op} = (\mathbf{E}^T \mathbf{E})^{-1} \mathbf{E}^T \mathbf{S} \quad (10.28)$$

se obtiene:

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix}_{op} = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{21} \\ -\frac{4}{21} \end{pmatrix} \quad (10.29)$$

resultado que podemos convolucionar de nuevo con la señal de entrada para obtener:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{10}{21} \\ -\frac{4}{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{20}{21} \\ \frac{2}{21} \\ -\frac{4}{21} \end{pmatrix} \quad (10.30)$$

que ciertamente es una aproximación razonable a un spike.

Queremos concluir este capítulo llamando la atención sobre el hecho de que en la solución estándar

$$\mathbf{G}_{op} = (\mathbf{E}^T \mathbf{E})^{-1} \mathbf{E}^T \mathbf{S} \quad (10.31)$$

no hay garantías acerca de las propiedades de invertibilidad de la matriz $\mathbf{M} = \mathbf{E}^T \mathbf{E}$. Este problema se resuelve generalmente regularizando la matriz \mathbf{M} por un procedimiento sencillo que consiste en añadir a \mathbf{M} una matriz diagonal, esto es, se efectúa la substitución: $\mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M} + \lambda^2 \mathbf{I}$, este procedimiento mejora ostensiblemente las propiedades de invertibilidad de la matriz (condicionamiento) y es conveniente cuando se utilizan algoritmos de inversión de tipo iterativo (Gauss Seidel por ejemplo).

Capítulo 11

La transformada de Fourier Rápida

El objetivo de este capítulo consiste en esbozar algunas de las ideas que soportan un algoritmo de cálculo para la transformada de Fourier discreta conocido como transformada de Fourier rápida¹ (FFT). Solo vamos a presentar un esbozo muy breve aunque suficiente para ilustrar las nociones básicas. Al lector interesado en la construcción general y en las versiones más modernas del algoritmo lo invitamos a revisar la referencia [9].

Comencemos por recordar la definición fórmula(8.14) que permite calcular las muestras de la transformada de Fourier de una señal discreta de N muestras

$$\hat{X}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)e^{-2\pi ink/N} \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (11.1)$$

que como ya habíamos discutido puede expresarse en forma matricial como

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{M}\mathbf{X} \quad (11.2)$$

donde \mathbf{X} y $\hat{\mathbf{X}}$ son los vectores que representan a la señal en los dominios de tiempo y frecuencia respectivamente

Ahora bien, para las aplicaciones debemos trasladar el cálculo de la DFT a un programa que corra en un computador. Al pensar en esos términos salta a la vista que en vista de que las componentes de \mathbf{M} son complejas y

¹Fast Fourier Transform

si asumimos que la señal en tiempo tiene valores complejos, que son necesarias N^2 multiplicaciones complejas y $(N)(N - 1)$ adiciones complejas para completar el cálculo de $\hat{\mathbf{X}}$. Para una señal larga este número de operaciones pueden provocar que el cálculo sea relativamente costoso. Afortunadamente, las propiedades especiales de \mathbf{M} permiten introducir un algoritmo que permite reducir el número de operaciones y por lo tanto el tiempo de cálculo de manera dramática.

No queremos presentar el algoritmo FFT en detalle, sino más bien mostrar las propiedades que lo hacen posible. Para ello y para que la exposición sea lo más simple posible consideremos el cálculo de la DFT de una señal de $N = 4$ muestras, cuya representación en los dominios de tiempo y frecuencia está dada por los vectores

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{pmatrix} \quad \hat{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \hat{X}(0) \\ \hat{X}(1) \\ \hat{X}(2) \\ \hat{X}(3) \end{pmatrix} \quad (11.3)$$

En este caso, y como habíamos visto en el ejemplo 11 en el capítulo 8, la matriz que relaciona ambas señales es

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^1 & W^2 & W^3 \\ 1 & W^2 & 1 & W^2 \\ 1 & W^3 & W^2 & W^1 \end{pmatrix} \quad (11.4)$$

En donde se ha utilizado el hecho de que las entradas de la matriz están dadas por $W^{nk \bmod N}$, propiedad que como veremos a continuación, constituye la base para construir el algoritmo FFT.

Consideremos las matrices

$$\mathbf{F}_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & W^3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{F}_2 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{pmatrix} \quad (11.5)$$

el producto $\mathbf{K} = \mathbf{F}_1 \mathbf{F}_2$ da como resultado

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^2 & 1 & W^2 \\ 1 & W^1 & W^2 & W^3 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \end{pmatrix} \quad (11.6)$$

que salvo la permutación entre la 2 y 3 filas es idéntica a la matriz \mathbf{M} , en otras palabras, \mathbf{M} puede factorizarse como

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}_{1 \leftrightarrow 2} \mathbf{F}_1 \mathbf{F}_2 \quad (11.7)$$

. donde $\mathbf{P}_{1 \leftrightarrow 2}$ es la matriz que permuta² las filas 1 y 2. En lugar de hacer esto vamos a introducir un vector auxiliar \mathcal{X} definido por:

$$\mathcal{X}(n) = \begin{pmatrix} X(0) \\ X(2) \\ X(1) \\ X(3) \end{pmatrix} \quad (11.8)$$

de manera que

$$\mathcal{X} = \mathbf{K} \mathbf{x} \quad (11.9)$$

así, si queremos calcular \mathbf{X} basta con encontrar \mathcal{X} y permutar las componentes importantes. Ahora bien, punto parece que estuviéramos haciendo algo sin sentido, ahora en lugar de multiplicar una matriz por un vector hay que multiplicar entre si dos matrices, luego multiplicar por el resultado a un vector y luego hay que permutar dos elementos del vector (lo que en principio es otro producto matricial más). Cabe preguntarse, ¿hacia adonde vamos?, ¿no estaremos haciendo algo complicando más las cosas?. La respuesta a esto llegará, por el momento seamos pacientes solo falta un poco para ver la luz detrás del algoritmo FFT.

Por el momento vamos a continuar estudiando lo que tenemos en la mano y vamos a calcular el vector \mathcal{X} con el fin de evaluar el número de operaciones requeridas para calcular sus componentes (es decir, para encontrar las muestras de la señal en el dominio de la frecuencia). Comencemos por definir un vector³ $\mathbf{x}^{(0)} \equiv \mathbf{x}$ y calculemos las componentes del vector $\mathbf{x}^{(1)} \equiv \mathbf{F}_2 \mathbf{x}^{(0)}$, es

²

$$\mathbf{P}_{1 \leftrightarrow 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

³esto es solamente por conveniencia en la notación

decir, comencemos por calcular

$$\begin{pmatrix} x^{(1)}(0) \\ x^{(1)}(1) \\ x^{(1)}(2) \\ x^{(1)}(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{(0)}(0) \\ x^{(0)}(1) \\ x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \end{pmatrix} \quad (11.10)$$

El elemento $x^{(1)}(0)$ se calcula como

$$x_{(1)}(0) = x^{(0)}(0) + W^0 x^{(0)}(1) \quad (11.11)$$

de manera que para el cálculo se requieren *una multiplicación y una adición complejas* (W^0 no es reducido a la unidad para desarrollar un resultado generalizado). El elemento $x^{(1)}(1)$

$$x^{(1)}(1) = x^{(0)}(1) + W^0 x^{(0)}(2) \quad (11.12)$$

también se determina también por una multiplicación y una adición complejas. Sin embargo, solo se requiere una adición compleja para calcular $x^{(1)}(2)$, en efecto, $W^0 = -W^2$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} x^{(1)}(2) &= x^{(0)}(2) + W^0 x^{(0)}(3) \\ &= x^{(0)}(2) - W^2 x^{(0)}(3) \end{aligned} \quad (11.13)$$

pero la multiplicación compleja $W^0 x^{(0)}(3)$ ya ha sido calculada durante la determinación de $x^{(1)}(1)$ lo que concluye el argumento. Un razonamiento similar demuestra que $x^{(1)}(3)$ se calcula mediante una sola adición compleja. En definitiva, hemos demostrado que para calcular el vector intermedio $\mathbf{x}^{(1)}$ solo hacen falta cuatro adiciones y dos multiplicaciones complejas.

Para completar el cálculo hay que realizar otro producto matricial ($\mathbf{x}^{(2)} \equiv \mathbf{F}_2 \mathbf{x}^{(1)}$) para obtener:

$$\begin{pmatrix} X(0) \\ X(2) \\ X(1) \\ X(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{(2)}(0) \\ x^{(2)}(1) \\ x^{(2)}(2) \\ x^{(2)}(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & W^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{(1)}(0) \\ x^{(1)}(1) \\ x^{(1)}(2) \\ x^{(1)}(3) \end{pmatrix} \quad (11.14)$$

Una vez más podemos contabilizar el número de operaciones, pero como ya hemos mostrado los argumentos del conteo nos limitaremos a dar los resultados (le invitamos a que los verifique (ejercicio)), $x^{(2)}(0)$ se obtiene

mediante una multiplicación y una adición complejas, $x^{(2)}(1)$ también mediante una adición compleja (recuerde que $W^0 = -W^2$ y que el resultado de las multiplicaciones se puede almacenar). $x^{(2)}(2)$ se determina mediante una multiplicación y una adición complejas, y $x^{(2)}(3)$ por sólo una adición compleja.

En definitiva, el mecanismo de cálculo que hemos utilizado permite calcular \mathcal{X} a través de un total de cuatro multiplicaciones y ocho adiciones complejas, en comparación con las 16 multiplicaciones y 12 adiciones complejas que serían necesarias si realizáramos el cálculo a través del producto $\mathcal{X} = \mathbf{K}\mathbf{x}$. El tedioso ejercicio teórico de factorización de la matriz \mathbf{K} como $\mathbf{K} = \mathbf{F}_1\mathbf{F}_2$ ha pagado un modesto dividendo reduciendo -en este ejemplo- el número total de productos complejos en un factor de 2 y reduciendo en 4 el número de adiciones complejas. Evidentemente esta reducción proviene del elevado número de entradas nulas que poseen las matrices \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 que reduce significativamente el número de multiplicaciones necesarias para completar el cálculo.

Lo interesante del resultado estriba en que para señales cuyo número de muestras sea una potencia entera de dos ($N = 2^\gamma$) la factorización puede generalizarse de manera sistemática. Debido a que el tiempo de computación está significativamente gobernado por el número de multiplicaciones requeridas, la factorización (que constituye la base del algoritmo) es la razón de la eficiencia de la FFT.

En todo caso, en este punto aún no hemos concluido el trabajo, en efecto, hemos calculado el vector $\mathcal{X}(n)$ cuyas entradas contienen los valores del vector (la transformada de Fourier que estamos buscando) $\hat{\mathbf{X}}$ pero no en el orden adecuado, esto es, hemos calculado

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} X(0) \\ X(2) \\ X(1) \\ X(3) \end{pmatrix} \text{ en lugar de } \hat{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{pmatrix}$$

en principio, para completar el cálculo deberíamos multiplicar al vector \mathcal{X} por una matriz de transposición, pero como queremos ahorrar cálculos eso no es lo que vamos a hacer. Para reordenar al nuevo vector ($\mathcal{X}(n)$) lo vamos a reescribir enumerando a las entradas por los valores binarios del índice n :

$$\begin{pmatrix} X(0) \\ X(2) \\ X(1) \\ X(3) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} X(00) \\ X(10) \\ X(01) \\ X(11) \end{pmatrix} \quad (11.15)$$

La observación final es la siguiente, si invertimos los el orden de los 1's y 0's en argumentos binarios (es decir, mapeamos $01 \rightarrow 10$, $10 \rightarrow 01$, etc.), resulta

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} X(00) \\ X(10) \\ X(01) \\ X(11) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} X(00) \\ X(01) \\ X(10) \\ X(11) \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{X}} \quad (11.16)$$

Dicho en forma muy cruda, la transformada de Fourier rápida no es otra cosa que un procedimiento de factorización de las matrices (\mathbf{M}) que permiten el cálculo de la transformada de Fourier discreta que generaliza el procedimiento que acabamos de mostrar. En el caso general en que el número de muestras es $N = 2^\gamma$, el algoritmo FFT permite utilizar las propiedades especiales de transformar la matriz de transformación $\mathbf{M}_{N \times N}$ en γ matrices (de dimensión $N \times N$) cuya estructura permite reducir enormemente el número de multiplicaciones y adiciones complejas que habría que efectuar para completar el producto $\mathbf{M}\mathbf{x}$.

En el ejemplo que acabamos de presentar el procedimiento requiere $N\gamma/2 = 4$ multiplicaciones complejas y $N\gamma = 8$ adiciones complejas, mientras que el método directo necesita $N^2 = 16$ multiplicaciones complejas y $(N)(N-1)+12$ adiciones complejas (ver Figura11.1).

En el caso general (y si asumimos que el tiempo de computación es proporcional al número de multiplicaciones), se puede probar que la relación aproximada entre el tiempo de computación del método directo y el requerido por la FFT está dada por:

$$\frac{N^2}{N\gamma/2} = \frac{2N}{\gamma} \quad (11.17)$$

Así por ejemplo, para $N = 1024 = 2^{10}$ la reducción es de más de 200 a 1. La Figura 11.1 ilustra la relación entre el número de multiplicaciones requeridas usando la transformada rápida de Fourier comparada con el número de multiplicaciones usando el método directo.

En el caso de una señal con un número arbitrario K de muestras el algoritmo puede utilizarse completando la señal con ceros hasta completar un

=4in fft.ps

Figura 11.1: Comparación entre el Nro. de multiplicaciones complejas requeridas, en el cálculo directo, y en el algoritmo de Transformada Rápida de Fourier (FFT).

número de muestras igual a la potencia de 2 inmediatamente superior a K (este procedimiento se conoce como “zero padding”).

11.1. Código para FFT

En esta sección presentamos un código para la FFT en Lenguaje C

Las entradas al programa son: `signal[]`, un apuntador a la señal discreta compleja, N , el número de muestras, nu ($N = 2^{nu}$) y dir , el sentido de la transformación ($dir = +1$ si la transformación es directa, y $dir = -1$ si la transformación es inversa).

```
int ibitr(int j,int nu)
{
int j1, j2, i, ibit;

j1 =j;

ibit = 0;

for (i=0; i<nu; i++)
{

j2 = j1/2;

ibit = ibit* 2+(j1-2*j2);

j1 = j2;

}
```

```
    return (ibit);
}

void FFT(complex signal[],int N,int nu,int dir)
{
    complex factor, temp;

    float arg;

    int n2, nu1, p, k1, k, k1N2, i, l, z;

    n2=N/2;

    nu1=nu-1;

    k=0;

    for (l=0; l<nu; l++)
    {
        do
        {
            for (i=0; i< n2; i++)
            {
                z=k/pow(2,nu1);

                p = ibitr(z,nu);

                arg = 6.283185*p/(float)N;
```

```
factor.re=cos(arg);
factor.im=sin(arg);
if (dir==1)
    factor = factor;
else
    factor.im=-(factor.im);
k1 = k ;
k1N2 = k1 + n2;
temp.re=((signal[k1N2].re)*factor.re)+((signal[k1N2].im)*factor.im);
temp.im=((signal[k1N2].im)*factor.re)-((signal[k1N2].re)*factor.im);
signal[k1N2].re= signal[k1].re - temp.re;
signal[k1N2].im= signal[k1].im - temp.im;
signal[k1].re = signal[k1].re + temp.re;
signal[k1].im = signal[k1].im + temp.im;
k++;
}
k = k + n2;
}while(k<N);
k = 0;
```

```
    nu1--;

    n2 = n2/2;
}

for (k=0; k<N; k++)
{
    i = ibitr(k,nu);

    if (i<=k) continue;

    memcpy(&temp,&signal[k],sizeof(complex));

    memcpy(&signal[k],&signal[i],sizeof(complex));

    memcpy(&signal[i],&temp,sizeof(complex));
}

if (dir==-1)
{
    for (k=0; k<N; k++)
    {
        signal[k].re=(signal[k].re)/(float)N;

        signal[k].im=(signal[k].im)/(float)N;
    }
}
```

}

Bibliografía

- [1] R. Courant y F. John. *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático*. Editorial LIMUSA, México, 1979.
- [2] G. Arfken. *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press, New York, 2nd edition, 1970.
- [3] Stackgold I. *Green's Functions and Boundary Value Problems*. Problems in Pure & Applied Mathematics. John Wiley and Sons, New York, 1979.
- [4] T. M. Apostol. *Análisis*. Reverté S.A., Barcelona, España, 1976.
- [5] Claerbout J. *Fundamentals of Geophysical Data Processing*. Blackwell Scientific Publications, Cambridge, Massachusetts, 1985.
- [6] Claerbout J. *Earth Sounding Analysis: Processing Versus Inversion*. Blackwell Scientific Publications, Cambridge, Massachusetts, 1992.
- [7] Robinson E. y Treitel S. *Geophysical Signal Analysis*. Prentice Hall, 1980.
- [8] Taner M. T. et al. Complex seismic trace analysis. *Geophysics*, 44, 1979.
- [9] Vetterling W. Press W. H., Teukolsky S. and Flannery B. *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press, 1992.